

文章编号: 0258-1825(2021)01-0138-19

高精度有限差分格式的色散优化及耗散控制

李妍慧¹, 陈琮巍¹, 任玉新^{1,*}, 孙振生², 王秋菊³

(1. 清华大学 航天航空学院, 北京 100084; 2. 火箭军工程大学, 西安 710025;

3. 北京应用物理与计算数学研究所, 北京 100094)

摘 要:本文综述了我们在高精度有限差分格式的色散优化和耗散控制方面的研究进展。首先,我们提出了半离散有限差分格式色散和耗散相互独立的充分条件,实现了差分格式色散和耗散特性的独立调节。在此基础上,提出了色散最小、耗散可控的高精度差分格式,称为 MD CD 格式。MD CD 格式已经得到了广泛应用,取得了很好的计算效果,但其主要缺点是耗散的调节依赖于经验。为了解决这一问题,我们进一步提出耗散的自适应调节方法。具有自适应耗散特性的高精度有限差分格式的基本特征是,差分格式的耗散能够随解的局部尺度自适应调节。为了构造这类格式,我们提出了一种新型的尺度识别器,它能够以等效无量纲波数的形式来定量衡量数值解的局部长度尺度。在此基础上,设计差分格式耗散参数与尺度识别器得到的等效无量纲波数之间的关系,从而构造了一类色散最小、耗散自适应的差分格式,称为 MD AD 格式。为了计算含有间断的问题,同时保持在光滑区的良好耗散特性,我们利用尺度识别器对一种经典的激波探测器进行改进,提出了一种新的激波探测器,并将自适应耗散格式与对应的 WENO 格式相混合,得到自适应耗散混合格式。近似色散关系显示该混合格式兼具高分辨率和鲁棒性。多个含间断流场的标准算例测试结果显示,自适应耗散混合格式具有良好的分辨率和激波捕捉能力。

关键词:自适应耗散格式;低色散格式;混合格式;尺度识别器;激波探测器

中图分类号: V211.3

文献标识码: A

doi: 10.7638/kqdlxxb-2020.0153

The dispersion optimization and dissipation adjustment for high-order finite difference schemes

LI Yanhui¹, CHEN Congwei¹, REN Yuxin^{1,*}, SUN Zhensheng², WANG Qiuju³

(1. School of Aerospace Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China;

2. Rocket Force University of Engineering, Xi'an 710025, China;

3. Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing 100094, China)

Abstract: In this paper, our recent work on the dispersion optimization and dissipation adjustment for high-order finite difference schemes is reviewed. For compressible flows with a broad range of length scales, good dispersion and dissipation properties are crucial for numerical schemes to realize high-fidelity simulations. It has been recognized that the minimization of dispersion error is an effective measure to improve the resolution of schemes, while the dissipation should be adjusted according to the local scale of the solution. We found a sufficient condition for a semi-discretized finite difference scheme to have independent dispersion and dissipation properties. Based on this finding, the high-order finite difference scheme with minimized dispersion and controllable dissipation (MD CD) was proposed. The MD CD scheme has been widely used and achieved good performance. However, one drawback is that the dissipation is controlled empirically. To realize the automatic adjustment of the dissipation according to the

收稿日期: 2020-08-26; 修订日期: 2020-10-15

基金项目: 国家重点研发计划(2016YFA0401200); 国家重大项目(GJXM92579); 国家自然科学基金(91752114, 11672160)

作者简介: 李妍慧(1996-), 女, 山西人, 博士研究生, 研究方向: 计算流体力学. E-mail: liyanhui_lyhn@163.com

通信作者: 任玉新*(1966-), 男, 河北人, 博士, 教授, 研究方向: 计算流体力学. E-mail: ryx@tsinghua.edu.cn

引用格式: 李妍慧, 陈琮巍, 任玉新, 等. 高精度有限差分格式的色散优化及耗散控制[J]. 空气动力学学报, 2021, 39(1): 138-156.

LI Y H, CHEN C W, REN Y X, et al. The dispersion optimization and dissipation adjustment for high-order finite difference schemes[J]. Acta Aerodynamica Sinica, 2021, 39(1): 138-156. doi: 10.7638/kqdlxxb-2020.0153

local scale of the solution, we devised a scale sensor to quantify the length scale of the numerical solution which can be calibrated to give the effective scaled wavenumbers. Then the dispersion-dissipation condition is used to construct the relationship between the dissipation parameter and the effective scaled wavenumber. A class of finite difference schemes with adaptive dissipation is thus obtained. To achieve the shock-capturing capability while maintaining the superior spectral properties in the smooth regions, we make an improvement to a classical shock detector by incorporating the proposed scale sensor, and construct a new hybrid scheme which consists of the adaptive dissipation scheme and the corresponding weighted essentially non-oscillation (WENO) scheme. The approximate dispersion relation (ADR) shows that the new hybrid scheme is accurate and robust. Several benchmark test problems with broadband length scales as well as discontinuities are presented to validate the high-resolution and the good shock-capturing capability of the proposed scheme.

Keywords: adaptive dissipation scheme; low dispersion scheme; hybrid scheme; scale sensor; shock detector

0 引言

超声速流中,多尺度结构(如湍流)、间断(如激波)以及这些结构之间的相互作用同时存在,给数值模拟带来很大的挑战。一方面,多尺度结构要求数值格式具有较小的色散耗散误差以精确地捕捉幅值和相位,另一方面,间断附近需要格式具有足够的耗散以抑制数值振荡。这两种矛盾的要求使得构造高分辨率的激波捕捉格式非常困难。目前最具代表性的高精度激波捕捉格式是 WENO 格式,它最初由 Liu 等^[1]提出,之后被 Jiang 和 Shu^[2]改进。WENO 格式可以根据流场局部的光滑性,动态调整候选模板的权重来无振荡地捕捉激波,但是这一非线性机制也使得格式在光滑区的耗散过大,特别是在计算可压缩流动的多尺度结构时,数值耗散可能会高于物理耗散^[3]。

解决这一问题的一种方法是改进 WENO 或 ENO 格式的非线性机制,更好地实现光滑区和间断的尺度分离。Henrick 等^[4]提出了 WENO-M 格式,通过映射非线性权解决了 WENO-JS 在极点处不满足五阶收敛条件的问题。Borgers 等^[5]提出的 WENO-Z 格式采用了一种归一化的光滑因子,可以使非线性权在光滑区更快地恢复到线性权。该格式在极点处也满足五阶收敛条件,且计算量远小于 WENO-M 格式。刘朋欣等^[6]参考 Henrick 等^[4]提出的映射函数的思想,将一种五次分段多项式映射函数应用于一种由 NND 格式改型得到的中心型三阶格式,构造出 SWENO3-PPM5 格式,算例测试结果表明该格式具有比 WENO3 更高的分辨率。Taylor 等^[7]基于一种相对光滑限制器构造得到 WENO-RL 格式,当光滑因子间的比值较小时直接采用线性权,这种方法可以使格式在中低波数段的色散耗散特性和对应的线性格式一致,从而改善格式的谱特性。

WENO-SYMO 格式^[8]将对应的线性格式由迎风改为中心格式,并通过求解一个积分形式目标函数的最小值,对格式的谱特性进行优化。Hu 和 Adams 等^[9]发展了一种自适应的中心迎风六阶 WENO 格式(WENO-CU6),采用新的光滑因子控制格式在中心和迎风之间切换。最近发展的 TENO 格式^[10]采用新的模板选择和加权策略,来实现光滑区和间断的有效区分,从而改善分辨率。

另外一种方法是利用间断探测器,将激波捕捉格式和谱特性良好的格式结合起来,构造混合格式。混合格式在流场光滑区采用低耗散的格式以提高分辨率,而在间断附近采用激波捕捉格式以避免数值振荡。混合格式首先由 Adams 和 Shariff^[11]提出,他们将非守恒形式的紧致格式与 ENO 格式相结合,用于激波湍流相互作用流场的模拟。Pirozzoli^[12]将守恒的紧致格式与 WENO 格式相结合,构造了一种守恒的紧致-WENO 混合格式。该工作由 Ren 等^[13]进一步发展,他设计了一种新的间断探测器,并采用加权的方式将守恒的紧致格式和 WENO 格式混合,避免了两种格式的突然切换。武从海等^[14]将 Ren 等^[13]提出的间断探测器进行改进,构造了基于 WENO-Z 格式和五阶守恒紧致格式的混合格式,并且通过仅对混合格式中 WENO 部分进行特征投影处理,提高了计算效率。对于混合格式,间断探测器的精度对格式的谱特性有很大影响。传统的间断探测器通常采用流场解的一阶导数或二阶导数来判断流场的光滑性^[13,15-16]。此外,近年来还发展了基于非正交小波基函数^[15,17]以及 WENO 非线性权^[18-21]的间断探测器。然而,如何将间断和低频成分以及极点进行区分仍然是一个困难的问题。

上述两种方法改善计算效果的主要思路都是在流场光滑区尽可能地优先采用线性格式,因此,线性

格式的性能对最终计算结果有直接影响。例如, WENO-M 和 WENO-Z 等的线性格式是五阶迎风格式, 而 WENO-SYMO 格式对应的线性格式是六阶中心格式。混合格式的线性部分则多采用紧致格式和中心格式。当线性格式是迎风格式时, 对湍流直接数值模拟等应用而言, 耗散还是较大; 当线性格式为中心格式时, 耗散则不足。Pirozzoli^[12]指出, 为了减少数值振荡, 格式需要具有一定的耗散以抑制色散误差较大的高波数成分。但是, 如何合理地确定线性格式的耗散大小仍然是一个开放问题。

我们最近的工作, 就是解决混合格式中线性部分的色散优化和耗散控制问题。关于色散优化的方法, 已经开展了较多研究, 但是线性格式的耗散控制相关的研究还比较少。本文综述了我们近期的相关研究工作。首先, Sun 等^[22]提出了一类色散耗散相互独立的有限差分格式, 在优化色散同时, 耗散可以通过一个参数调节, 从而得到了色散最小、耗散可控 (Minimized Dispersion and Controllable Dissipation, MDCCD) 格式。但是 MDCCD 格式耗散参数的设置依赖于具体问题, 需要基于经验人工进行选取, 而在大型的数值计算如直接数值模拟中, 参数的调试会花费大量的时间。Hu 等^[23]认为, 格式的耗散大小应该与色散误差相关。他们据此得到一个色散耗散条件, 来确定足够的耗散以抑制非物理的高频振荡。Sun 等^[24]根据这一关系, 确定了六阶 MDCCD 格式的耗散参数, 在多个测试算例中, 格式均表现出较好的鲁棒性。这种方法虽然可以得到具有合适耗散的格式, 但它只能调节格式耗散的整体水平, 而没有考虑解的局部尺度。

理想的格式耗散应该是与数值解的局部尺度相关的。在解的局部尺度远大于网格尺度时, 线性格式的耗散应该很小甚至为 0。当解的局部尺度与网格尺度接近时, 此时格式的色散误差已非常大, 应当将耗散增加到足以抑制高波数振荡的水平。根据这一思想, Li 等^[25]发展了一类具有最小色散、自适应耗散特性 (Minimized Dispersion and Adaptive Dissipation, MDAD) 的格式。

自适应耗散的差分格式包含以下要素。首先, 为了保证耗散的自适应不影响格式的色散特性, 选择色散和耗散相互独立的四阶 MDCCD 格式作为自适应耗散格式的基础。其次, 为了识别数值解的局部尺度, Li 等^[25]提出了一种基于流场解的导数的尺度识别器, 可用来得到数值解局部的等效无量纲波数。最后, 采用 Hu 等^[23]提出的色散耗散条件, 设计出耗散参数与局部等效无量纲波数之间的关系, 从而构造得

到具有自适应耗散特性的 MDAD 格式。

为了使格式具有激波捕捉能力, 通过将 MDAD 格式的数值通量表示为一系列候选模板上的低阶多项式的线性组合, 并引入 WENO 格式的非线性权, 发展了 MDAD-WENO 格式。之后将 MDAD 格式与 MDAD-WENO 格式相结合, 构造了一种混合格式, 记为 MDAD-HY。采用近似色散关系^[26]分析 MDAD-HY 格式与其他激波捕捉格式的近似谱特性, 发现 MDAD-HY 格式相比基于 MDCCD 的混合格式 MDCCD-HY, 在中低波数段的耗散更小, 而在高波数段有相近的耗散, 说明格式在数值解尺度较大的区域分辨率较高, 而在间断区也有较好的鲁棒性。构造混合格式的一个关键问题是合理的间断探测器。为此, Li 等^[25]将传统间断探测器^[13]与尺度识别器相结合, 提出了一种新的间断探测器, 能够有效减少对光滑区的极点的误判。

本文介绍了 MDCCD 格式、MDAD 格式、混合格式 MDCCD-HY 和 MDAD-HY, 以及 MDCCD 格式的应用情况和 MDAD 格式的测试算例, 最后作出了总结。

1 色散最小、耗散可控有限差分格式

本文以一维线性波动方程为例, 介绍高精度有限差分格式的色散优化和耗散控制方法。方程形式如下:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

其中, u 为守恒量, $f = au$ 为通量且 a 为常数。考虑在均匀网格上, 采用半离散有限差分格式对式 (1) 在 (x_j, t) 处进行离散, 得到:

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + f'_{\Delta}(x_j) = 0 \quad (2)$$

其中 Δx 为网格长度, $f'_{\Delta}(x_j)$ 为有限差分格式对空间一阶偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 在 x_j 的近似, 可表示为:

$$f'_{\Delta}(x_j) = \frac{1}{\Delta x} \sum_{m=-r}^s b_m f_{j+m} \quad (3)$$

其中 $f_{j+m} = f(x_j + m\Delta x)$ 。式 (3) 可改写为守恒形式, 即:

$$f'_{\Delta}(x_j) = \frac{1}{\Delta x} (\hat{f}_{j+\frac{1}{2}} - \hat{f}_{j-\frac{1}{2}}) \quad (4)$$

其中 $\hat{f}_{j+\frac{1}{2}}$ 为 $x_{j+\frac{1}{2}}$ 处的数值通量。

常规的数值格式色散和耗散特性是相互关联的, 但是 MDCCD 格式具有色散、耗散相互独立的特性, 这就使得它可以对色散进行单独优化, 而耗散也可以根

据不同工况进行调节。为了简洁,本文将只介绍四阶 MD CD 格式^[22],六阶 MD CD 格式的具体细节参见文献^[24]。

1.1 MD CD 格式的半离散特性

当空间有限差分格式包含对称的 $(2r+1)$ 个模板点时,式(3)可写为:

$$f'_{\Delta}(x_j) = \frac{1}{\Delta x} \sum_{m=-r}^r b_m f_{j+m} \quad (5)$$

通过对 b_m 的合理选取,格式最高可以达到 $2r$ 阶精度。Sun 等在文献^[22]中证明,当式(5)中的 $f'_{\Delta}(x_j)$ 达到 $(2r-2)$ 阶精度时,格式的色散和耗散特性将分别由两个自由参数 γ_{disp} 和 γ_{diss} 单独控制。通过求解一个积分型目标函数的最小值问题,可以得到最优的色散参数 γ_{disp} ,而耗散参数 γ_{diss} 需要根据具体问题来确定,从而得到具有低色散、可控耗散特性(MD CD)的有限差分格式。

当 $r=3$ 时,四阶的 MD CD 格式^[22]形式如下:

$$\begin{aligned} f'_{\Delta}(x_j) = & \frac{1}{\Delta x} \left[\left(-\frac{1}{2}\gamma_{\text{disp}} - \frac{1}{2}\gamma_{\text{diss}} \right) f_{j-3} + \right. \\ & \left(2\gamma_{\text{disp}} + 3\gamma_{\text{diss}} + \frac{1}{12} \right) f_{j-2} + \\ & \left(-\frac{5}{2}\gamma_{\text{disp}} - \frac{15}{2}\gamma_{\text{diss}} - \frac{2}{3} \right) f_{j-1} + \\ & 10\gamma_{\text{diss}} f_0 + \left(\frac{5}{2}\gamma_{\text{disp}} - \frac{15}{2}\gamma_{\text{diss}} + \frac{2}{3} \right) f_{j+1} + \\ & \left(-2\gamma_{\text{disp}} + 3\gamma_{\text{diss}} - \frac{1}{12} \right) f_{j+2} + \\ & \left. \left(\frac{1}{2}\gamma_{\text{disp}} - \frac{1}{2}\gamma_{\text{diss}} \right) f_{j+3} \right] \quad (6) \end{aligned}$$

将该格式写为守恒格式,数值通量 $\hat{f}_{j+\frac{1}{2}}$ 由对称的 $2r$ 个模板点组成,形式如下

$$\begin{aligned} \hat{f}_{j+\frac{1}{2}} = & \frac{1}{\Delta x} \left[\left(\frac{1}{2}\gamma_{\text{disp}} + \frac{1}{2}\gamma_{\text{diss}} \right) f_{j-2} + \right. \\ & \left(-\frac{3}{2}\gamma_{\text{disp}} - \frac{5}{2}\gamma_{\text{diss}} - \frac{1}{12} \right) f_{j-1} + \\ & \left(\gamma_{\text{disp}} + 5\gamma_{\text{diss}} + \frac{7}{12} \right) f_j + \\ & \left(\gamma_{\text{disp}} - 5\gamma_{\text{diss}} + \frac{7}{12} \right) f_{j+1} + \\ & \left(-\frac{3}{2}\gamma_{\text{disp}} + \frac{5}{2}\gamma_{\text{diss}} - \frac{1}{12} \right) f_{j+2} + \\ & \left. \left(\frac{1}{2}\gamma_{\text{disp}} - \frac{1}{2}\gamma_{\text{diss}} \right) f_{j+3} \right] \quad (7) \end{aligned}$$

不论 γ_{disp} 和 γ_{diss} 如何选取,格式都有四阶精度。

下面分析式(6)所示四阶 MD CD 的半离散色散耗散特性。考虑单一的简谐波,

$$f(x) = \hat{u}_0 e^{i\omega x} \quad (8)$$

则空间一阶偏导数有精确解

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{ik}{\Delta x} \hat{u}_0 e^{i\omega x} \quad (9)$$

其中 $k = \omega \Delta x$ 为无量纲波数。将式(8)代入式(6)并写为:

$$f'_{\Delta}(x_j) = \frac{ik'}{\Delta x} \hat{u}_0 e^{i\omega x}, \quad (10)$$

其中 $k' = \Re(k') + i\Im(k')$ 为修正的无量纲波数, $\Re(k')$ 和 $\Im(k')$ 为 k' 的实部和虚部,分别控制半离散格式的色散和耗散特性。则四阶 MD CD 格式的半离散色散和耗散特性为:

$$\begin{aligned} \Re(k') = & \gamma_{\text{disp}} \sin 3k - \left(4\gamma_{\text{disp}} + \frac{1}{6} \right) \sin 2k + \\ & \left(5\gamma_{\text{disp}} + \frac{4}{3} \right) \sin k \\ \Im(k') = & \gamma_{\text{diss}} (\cos 3k - 6\cos 2k + 15\cos k - 10) \quad (11) \end{aligned}$$

显然格式的色散特性只与 γ_{disp} 有关,耗散特性只与 γ_{diss} 有关,从而实现了格式色散和耗散的单独控制。

MD CD 格式的色散和耗散特性是相互独立的,因此可以对色散进行单独优化而不影响耗散。通常认为格式的色散误差应当在选定的标准下达到最小。文献[8]设计了一种加权积分形式的优化目标函数:

$$E = \int_0^{\pi} e^{-\nu k} [\Re(k) - k]^2 dk \quad (12)$$

其中 $e^{-\nu k}$ 用于控制不同波数下色散误差的相对权重,通过求解使目标函数式(12)最小的优化问题,可以得到最优的色散参数 γ_{disp} 。为了使格式在尽可能大的波数范围内都有较小的色散误差,文献[22]最终采用了 $\nu=8$ 下的最优色散参数,

$$\gamma_{\text{disp}} = 0.046 \ 378 \ 3 \quad (13)$$

图 1 展现了优化后的四阶 MD CD 格式的色散特性,并与五阶迎风格式(UW5,五阶 WENO 格式的线性部分)和六阶中心差分格式(C6)进行比较。可以看到 UW5 和 C6 的色散特性完全一致,而优化后的四阶 MD CD 格式则在更长的波数范围内有较好的色散特性。为了更清楚地展示中低波数段各个格式的色散特性差异,我们采用绝对色散误差 $|\Re(k') - k|$ 来进行比较,图 2 为不同格式的色散误差。Hu 等^[27]定义格式的最大可解波数 k_c^* 应为满足限制条件 $|\Re(k') - k| < 0.005$ 的极限波数,则 C6 和 UW5 均有 $k_c^* = 0.976$,而 MD CD 格式的最大可解波数为 $k_c^* = 1.297$,相比 C6 和 UW5 提升了 32.9%。

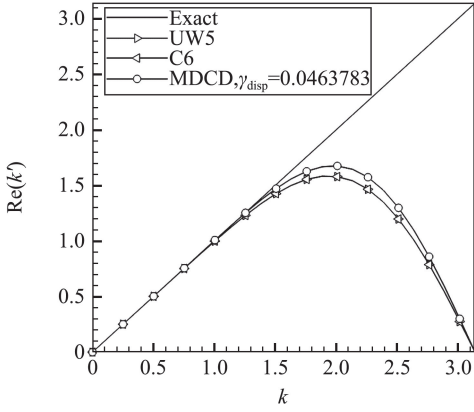


图 1 不同格式的色散特性

Fig.1 Comparison of dispersion properties of various linear schemes

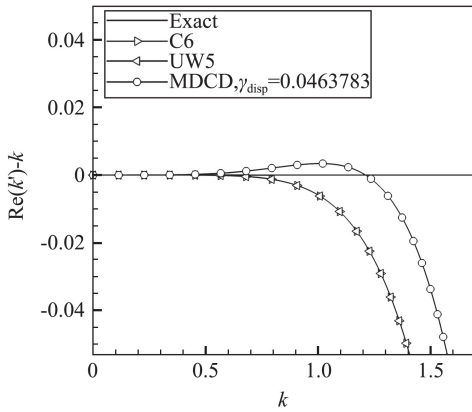


图 2 不同格式的色散误差

Fig.2 Comparison of dispersion errors of various linear schemes

对于耗散特性,为了使格式保持稳定,所有波数下的耗散都应非负。由式(11)所示,MDCCD 格式的耗散大小只与 γ_{diss} 有关,虚部 $\Im(k')$ 可改写为:

$$\Im(k') = \gamma_{\text{diss}} g(\cos k) \quad (14)$$

其中,

$$g(x) = 4x^3 - 12x^2 + 12x - 4 \quad (15)$$

由于 $g'(x) = 12(x-1)^2 \geq 0$, 为单调非减函数,易证 $g(\cos k) \leq 0$ 。因此当 $a > 0$ 时,如果 $\gamma_{\text{diss}} \geq 0$,则 MDCCD 格式有非负耗散,格式是稳定的,且随着 γ_{diss} 的增大,格式的耗散增加。当耗散参数取 0 时,MDCCD 为中心格式,此时格式分辨率最高,但是无法抑制高波数的非物理振荡。

在实际计算中,正如文献[12]提到的,格式需要具有一定的耗散。对于四阶 MDCCD 格式, Sun 等^[22]对不同算例采用试错的方法确定合适的耗散参数 γ_{diss} 进行计算。而在文献[24]中, Sun 等采用 Hu 等^[23]提出的色散耗散条件确定了六阶 MDCCD 格式的耗散参数。多个数值实验结果显示该六阶 MDCCD 格式表现出较好的鲁棒性,没有出现明显的数值振

荡。Hu 等^[23]提出的色散耗散条件具体形式如下:

$$r = \frac{\left| \frac{\partial \Re(k')}{\partial k} - 1 \right|}{|\Im(k')|} \sim 1 < 10 \quad (16)$$

Hu 等认为格式的耗散应当与色散误差相关,在式(16)中,给定波数下的色散耗散比值 r 越小表示格式对该波数的波耗散越大。当 $r < 10$ 时,格式的耗散基本可以抑制非物理的高频波动。这里我们采用与文献[24]相同的做法确定四阶 MDCCD 格式的通用耗散参数 γ_{diss} 。考虑到 $k = \pi$ 时格式的耗散最大,我们采用 $r(\pi)$ 来确定 γ_{diss} 。本文选择 $r \leq 9$ 作为限制条件,此时满足条件的最小耗散参数为:

$$\gamma_{\text{diss}} = 0.012 \quad (17)$$

图 3 展示了不同耗散参数下的 MDCCD 格式与 UW5 以及 C6 格式的半离散耗散特性对比,其中括号内的数字为耗散参数的大小。可以看到 C6 和 MDCCD(0)均为零耗散,MDCCD(0.035)的耗散特性与 UW5 接近,而 MDCCD(0.012)的耗散介于 C6 和 UW5 之间。MDCCD(0.012)在中低波数段耗散较小,格式有较高的分辨率,在高波数段,格式的色散误差变大时,也能提供足够的耗散来抑制振荡,有较好的鲁棒性。因此,对于大多数工况,我们推荐采用 MDCCD(0.012)。在本文中,如无特殊说明,MDCCD 格式的耗散参数均采用 $\gamma_{\text{diss}} = 0.012$ 。

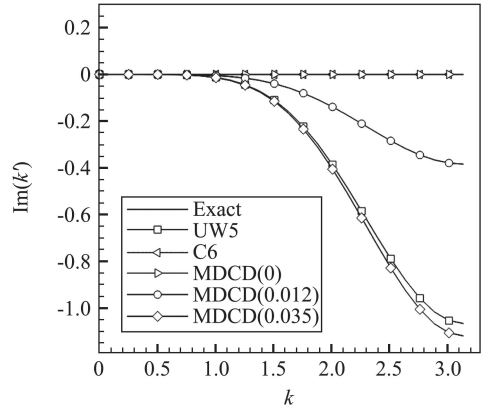


图 3 不同格式的耗散特性

Fig.3 Comparison of dissipation properties of various linear schemes

1.2 MDCCD 格式的全离散特性分析

上一节中我们提到,MDCCD 格式的半离散色散耗散特性相互独立,分别受色散参数 γ_{disp} 和耗散参数 γ_{diss} 控制。但实际计算中,结果同时受到空间离散和时间离散的影响,因此分析格式的全离散特性是有必要的。

考虑线性对流方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (18)$$

当初始值为 $u(x, 0) = u_0(x) = \hat{u}_0 e^{i\omega x}$ 时, 式(18) 在 $t = \Delta t$ 的精确解为

$$u_{ex} = e^{-ikc} \hat{u}_0 e^{i\omega x} \quad (19)$$

其中 $c = a \Delta t / \Delta x$ 为库朗数, $k = \omega \Delta x$ 为无量纲波数。而半离散方程式(4)的解为:

$$u_s = e^{-ik'c} \hat{u}_0 e^{i\omega x} \quad (20)$$

其中 k' 为 1.1 节中所述的无量纲修正波数。对比式(19)和式(20), 可以发现空间离散格式引入的误差为:

$$r_s = e^{-i(k' - k)c} = e^{\Im(k')c} e^{-i(\Re(k') - k)c} \quad (21)$$

其中 $|r_s| = e^{\Im(k')c}$ 为半离散耗散误差, 而 $\delta_s = (\Re(k') - k)c$ 为半离散色散误差。若采用显式龙格库塔格式进行时间积分, 则在 $t = \Delta t$ 时刻有:

$$u_t = G(k, c) \hat{u}_0 e^{i\omega x} \quad (22)$$

其中 $G(k, c)$ 为放大因子, 具体形式为一个 s 阶多项式, 其中 s 为龙格库塔格式的级数。对比式(22)和式(19), 可以发现 $G(k, c)$ 为精确的放大因子 e^{-ikc} 的近似。因此, 格式的全离散误差为:

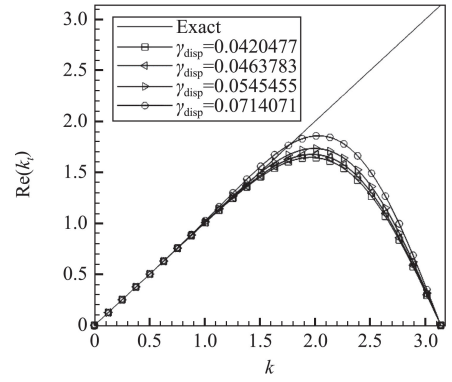
$$r_t = |r_t| e^{-i\delta_t} = \frac{G(k, c)}{e^{-ikc}} \quad (23)$$

其中 $|r_t| = |G(k, c)|$ 为全离散耗散误差, $\delta_t = -\delta_G - kc$ 为全离散色散误差。考虑到 1.1 节中分析半离散色散耗散特性时采用的是 $\Re(k')$ 和 $\Im(k')$, 为了使全离散特性分析与半离散量级一致, 对比 $|r_s|$ 和 $|r_t|$, 以及 δ_s 和 δ_t , 我们得到:

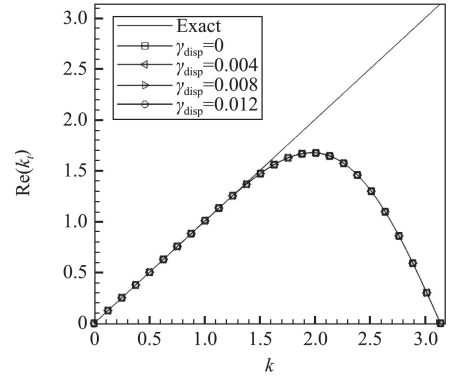
$$\begin{aligned} \Re(k_t) &= -\delta_G / c \\ \Im(k_t) &= \lg(|G(k, c)|) / c \end{aligned} \quad (24)$$

其中 k_t 为全离散情况下的等效无量纲修正波数。由式(24)可知, 全离散的色散耗散特性均与库朗数 c 有关。为了不失一般性, 我们采用 $c = 0.3, 0.6, 1.0$ 三种条件, 对全离散色散耗散特性关于 γ_{disp} 和 γ_{diss} 的灵敏度进行测试, 结果如图 4~图 6 所示。

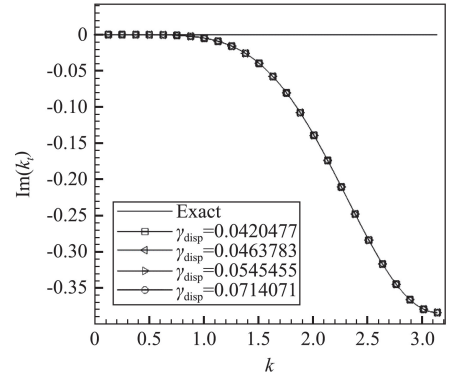
可以看到, 当库朗数较小 ($c = 0.3, 0.6$) 时, 格式的全离散色散耗散特性受时间离散影响尚不明显, 主要由空间离散决定^[24], 此时全离散色散特性主要受色散参数 γ_{disp} 控制, 对耗散参数 γ_{diss} 不敏感, 而全离散耗散特性主要受耗散参数 γ_{diss} 影响, 对色散参数 γ_{disp} 不敏感。但当库朗数 $c = 1.0$ 时, 时间离散带来的误差与空间离散相当, 此时全离散色散耗散特性表现出同时受色散参数 γ_{disp} 和耗散参数 γ_{diss} 影响。但是色散参数 γ_{disp} 对耗散的影响仍比耗散参数 γ_{diss} 小得多, 而耗散参数 γ_{diss} 对色散的影响也比色散参数 γ_{disp} 小得多。因此可以认为, 在全离散意义下, MDCD 格式仍是可用的。



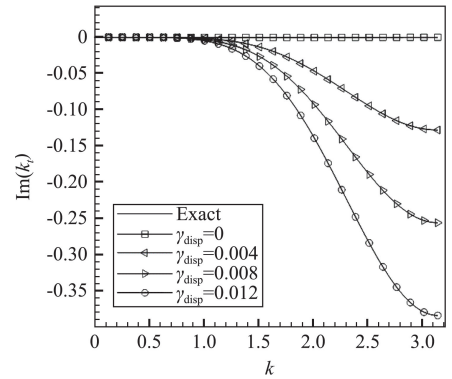
(a) 不同 γ_{disp} 下的全离散色散特性



(b) 不同 γ_{diss} 下的全离散色散特性

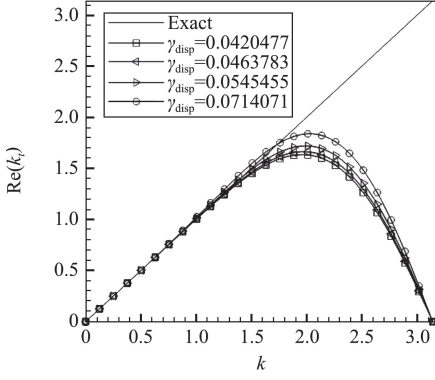


(c) 不同 γ_{disp} 下的全离散耗散特性

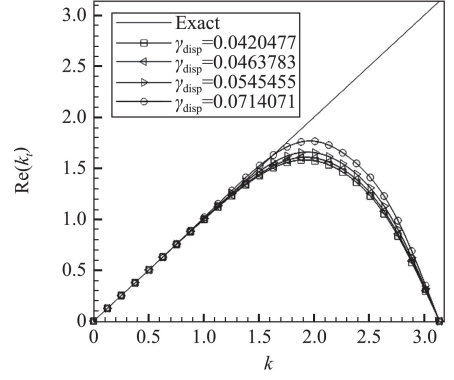


(d) 不同 γ_{diss} 下的全离散耗散特性

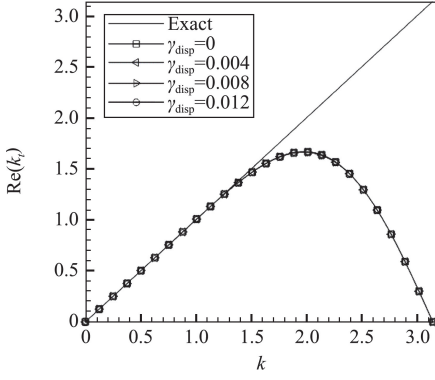
图 4 $c = 0.3$ 时的全离散色散耗散特性
Fig.4 Total dispersion and dissipation properties with the Courant number $c = 0.3$



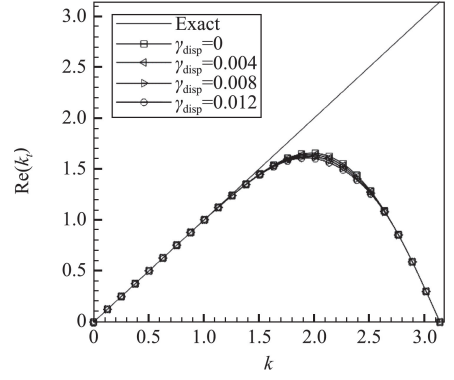
(a) 不同 γ_{disp} 下的全离散色散特性



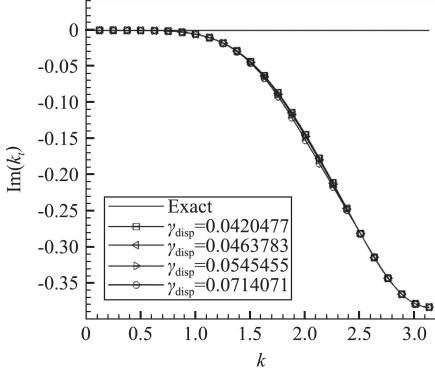
(a) 不同 γ_{disp} 下的全离散色散特性



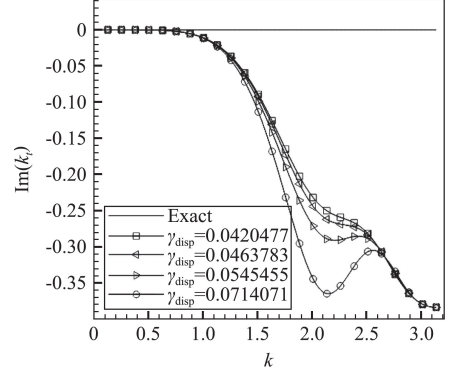
(b) 不同 γ_{diss} 下的全离散色散特性



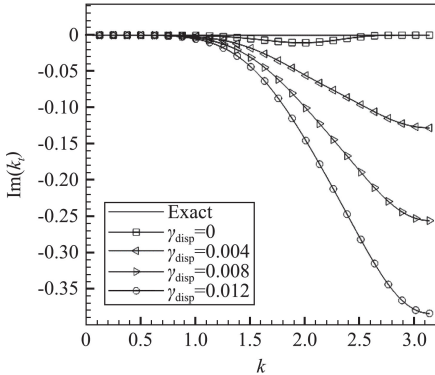
(b) 不同 γ_{diss} 下的全离散色散特性



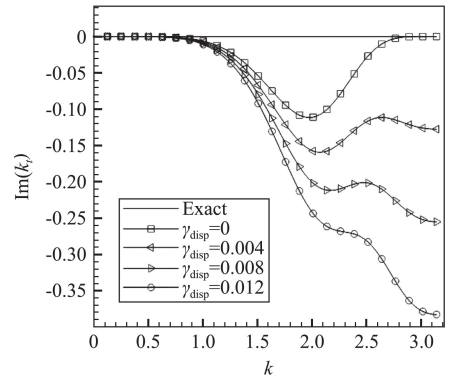
(c) 不同 γ_{disp} 下的全离散耗散特性



(c) 不同 γ_{disp} 下的全离散耗散特性



(d) 不同 γ_{diss} 下的全离散耗散特性



(d) 不同 γ_{diss} 下的全离散耗散特性

图 5 $c=0.6$ 时的全离散色散耗散特性

Fig.5 Total dispersion and dissipation properties with the Courant number $c=0.6$

图 6 $c=1.0$ 时的全离散色散耗散特性

Fig.6 Total dispersion and dissipation properties with the Courant number $c=1.0$

2 色散最小、耗散自适应有限差分格式

在 1.1 节中,我们采用 Hu 等^[23]提出的色散耗散条件确定了一个通用的四阶 MD CD 格式的耗散参数。但是我们也注意到,当流场尺度较大时,可以采用更小的数值耗散,因为此时物理耗散可被准确地预测以使计算稳定。在某些情况下,对于可精确分辨的解,采用中心格式计算已经足够^[9]。因此,当全场采用相同的耗散参数时,在流场尺度较大的光滑区,可能出现耗散过大的情况。

理想的耗散参数应该随着解的局部尺度而自动调节。为了实现这一目标,必须发展数值解的尺度识别器,并在此基础上构造具有最小色散、自适应耗散特性 (Minimized Dispersion and Adaptive Dissipation, MDAD) 的格式^[25]。本节综述这方面工作的最新进展。

2.1 数值解尺度识别器

原则上,在解的局部尺度远大于网格尺度时,线性格式的耗散应该很小甚至为 0,以提高格式的分辨率。而当解的局部尺度与网格尺度接近时,应该将耗散增加到足以抑制高波数振荡的水平。如果能够实现这一点,则 MD CD 格式在鲁棒性不下降时,分辨率将得到进一步改善。为此,本节将提出一种数值解局部尺度识别器,用于识别数值解局部的等效长度尺度,作为构造自适应耗散格式的第一步。

数值解尺度的确定是一个开放性的问题,目前相关的研究很少。Li 等^[28]提出了一种尺度识别器,用于优化一种五点非线性格式,以计算扩散方程中的二阶导数项。而文献^[25]提出了一种新的数值解局部波数识别器,用于自适应耗散格式的构造。

设计尺度识别器的难点在于定量描述尺度时看似矛盾的两个要求。一方面,考虑到我们关注的是解的局部特性,尺度识别器应该作用于局部的物理空间。另一方面,为了将尺度识别器用于耗散控制,需要将其表示为波数的形式,而波数是傅里叶空间中的概念。为了满足上述两个条件,文献^[25]提出一种两步的构造校准方法,即首先基于物理空间构造一种尺度识别器,之后再采用正弦波来校准尺度识别器中的参数。

第一步:构造。考虑光滑函数 $f(x)$,为了估计其在 x_0 附近的长度尺度,将其在 x_0 处作 Taylor 展开,有:

$$f(x) - f(x_0) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p!} f^{(p)} \Delta x^p \quad (25)$$

其中 $f^{(p)} = \frac{\partial^p f}{\partial x^p} \Big|_{x_0}$, $\Delta x = x - x_0$ 。根据式(25), p 阶

导数对函数变化的贡献为:

$$\Delta f_p = \frac{1}{p!} f^{(p)} \Delta x^p \quad (26)$$

当数值解的尺度较大时,低阶导数对函数变化的影响比高阶导数大。例如,当解为直线分布时,只有 Δf_1 对解的变化有贡献。而 x_0 附近如果出现小尺度结构,则说明高阶导数项产生的影响足够大。因此,原则上数值解的无量纲尺度可以用不同 Δf_p 的比值来表示:

$$\delta = \alpha \left| \frac{\Delta f_q}{\Delta f_p} \right|^{\frac{1}{p-q}} \quad (27)$$

其中 δ 为局部无量纲尺度,且 $p > q$ 。将式(26)代入式(27)得到:

$$\delta = \frac{\beta}{\Delta x} \left| \frac{f^{(q)}}{f^{(p)}} \right|^{\frac{1}{p-q}} \quad (28)$$

其中 β 是待定参数。考虑到四阶 MD CD 格式数值通量的模板点为 6 个,可以数值计算的导数 $f^{(p)}$ 的阶数为 $p=1\sim 5$,这里选取 $p=1\sim 4$ 构造尺度识别器,但此时仍然有多种可能的 $p-q$ 组合方式。为了解决这个问题,可以采用如下的校准步骤。

第二步:校准。在这一步中,采用正弦波来确定式(28)中的参数。若将式(28)定义的长度尺度校准为精确的正弦波无量纲波长,最简单的方式是令 $p = q + 2$,此时 $p-q$ 只剩如下两种组合方式:

$$\delta = \frac{\beta}{\Delta x} \sqrt{\frac{|f^{(1)}|}{|f^{(3)}|}}, \quad \text{或} \quad \delta = \frac{\beta}{\Delta x} \sqrt{\frac{|f^{(2)}|}{|f^{(4)}|}} \quad (29)$$

证明过程如下。考虑单一正弦波,

$$f = A \sin(\omega x + \varphi) \quad (30)$$

可以得到它的各阶导数:

$$\begin{aligned} f^{(1)} &= A\omega \cos(\omega x + \varphi) \\ f^{(2)} &= -A\omega^2 \sin(\omega x + \varphi) \\ f^{(3)} &= -A\omega^3 \cos(\omega x + \varphi) \\ f^{(4)} &= A\omega^4 \sin(\omega x + \varphi) \end{aligned} \quad (31)$$

将式(31)代入式(29),并考虑波数 ω 和波长 λ 之间的关系 $\omega = \frac{2\pi}{\lambda}$,得到:

$$\delta = \frac{\beta}{\Delta x} \sqrt{\frac{|f^{(1)}|}{|f^{(3)}|}} = \frac{\beta}{\Delta x} \sqrt{\frac{|f^{(2)}|}{|f^{(4)}|}} = \frac{\beta}{\Delta x} \frac{1}{\omega} = \frac{\beta}{2\pi} \frac{\lambda}{\Delta x} \quad (32)$$

因此,当 $\beta = 2\pi$ 时,无量纲尺度 δ 即为精确的无量纲波长,

$$\delta = \frac{\lambda}{\Delta x} \quad (33)$$

基于式(33),定义解的等效无量纲波数 k ,

$$k = \omega \Delta x = \frac{2\pi \Delta x}{\lambda} = \frac{2\pi}{\delta} \quad (34)$$

将式(29)代入式(34),并令 $\beta=2\pi$,则有:

$$k = \sqrt{\frac{|f^{(3)}|}{|f^{(1)}|}} \Delta x, \quad \text{或} \quad k = \sqrt{\frac{|f^{(4)}|}{|f^{(2)}|}} \Delta x \quad (35)$$

需要注意的是,式(35)定义的等效无量纲波数并不是傅里叶空间中的波数,而是局部长度尺度的倒数,是一个物理空间中局部的定义。对于单一正弦波,它可以得到精确的正弦波无量纲波数。为了避免式(35)在极值点和拐点附近的奇异性,可以把该式的两种情况相结合,从而有:

$$k = \sqrt{\frac{|f^{(3)}| + |f^{(4)}| \Delta x}{|f^{(1)}| + |f^{(2)}| \Delta x + \epsilon}} \Delta x \quad (36)$$

其中 ϵ 为防止分母为 0 的小量,取 $\epsilon=1 \times 10^{-3}$ 。

在自适应耗散格式中,数值通量中的耗散参数 γ_{diss} 由尺度识别器得到的等效无量纲波数确定。因此,式(36)应当在界面 $x_{j+\frac{1}{2}}$ 处计算。在文献[25]中, Li 等采用了数值的方法计算式(36)中的各阶导数。由式(7)可知, MDCD 格式的数值通量 $\hat{f}_{j+\frac{1}{2}}$ 采用关于 $x_{j+\frac{1}{2}}$ 界面对称的六个模板点,则 $x_{j+\frac{1}{2}}$ 界面处的各阶导数为:

$$\begin{aligned} f_{j+\frac{1}{2}}^{(1)} &= \frac{1}{\Delta x} \left(-\frac{3}{640} f_{j-2} + \frac{25}{384} f_{j-1} - \frac{75}{64} f_j + \frac{75}{64} f_{j+1} - \frac{25}{384} f_{j+2} + \frac{3}{640} f_{j+3} \right) \\ f_{j+\frac{1}{2}}^{(2)} &= \frac{1}{\Delta x^2} \left(-\frac{5}{48} f_{j-2} + \frac{13}{16} f_{j-1} - \frac{17}{24} f_j - \frac{17}{24} f_{j+1} + \frac{13}{16} f_{j+2} - \frac{5}{48} f_{j+3} \right) \\ f_{j+\frac{1}{2}}^{(3)} &= \frac{1}{\Delta x^3} \left(\frac{1}{8} f_{j-2} - \frac{13}{8} f_{j-1} + \frac{17}{4} f_j - \frac{17}{4} f_{j+1} + \frac{13}{8} f_{j+2} - \frac{1}{8} f_{j+3} \right) \\ f_{j+\frac{1}{2}}^{(4)} &= \frac{1}{\Delta x^4} \left(\frac{1}{2} f_{j-2} - \frac{3}{2} f_{j-1} + f_j + f_{j+1} - \frac{3}{2} f_{j+2} + \frac{1}{2} f_{j+3} \right) \end{aligned} \quad (37)$$

根据式(36), $x_{j+\frac{1}{2}}$ 界面处的等效无量纲波数为

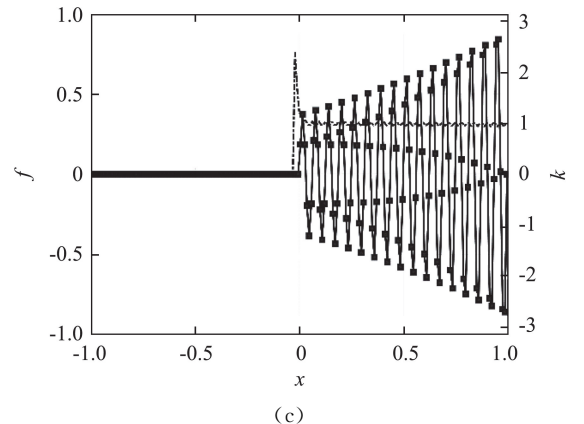
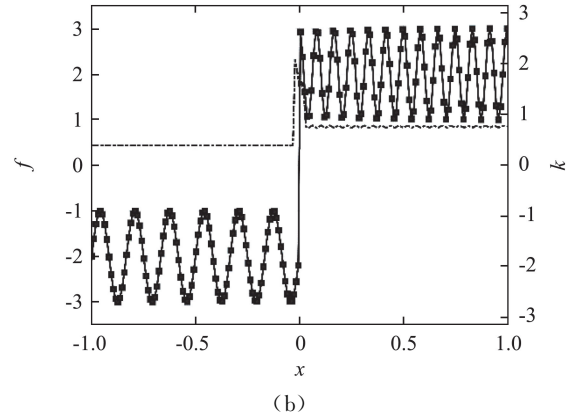
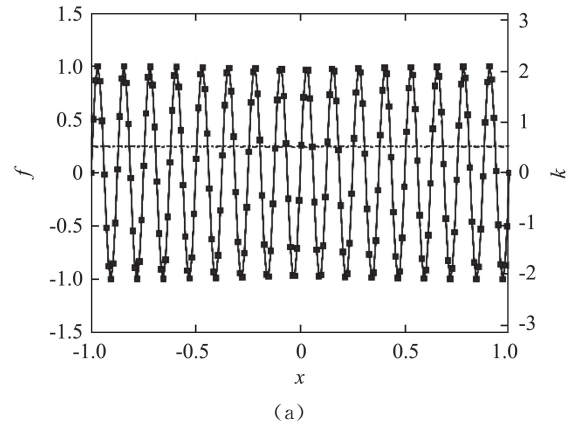
$$k_{j+\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{|f_{j+\frac{1}{2}}^{(3)}| + |f_{j+\frac{1}{2}}^{(4)}| \Delta x}{|f_{j+\frac{1}{2}}^{(1)}| + |f_{j+\frac{1}{2}}^{(2)}| \Delta x + \epsilon}} \Delta x \quad (38)$$

为了验证尺度识别器在流场中的效果, Li 等^[25]采用如下四组指定的函数进行静态测试,其中包括:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad f &= \sin(16\pi x), \quad -1 \leq x \leq 1 \\ \text{(b)} \quad f &= \begin{cases} \sin(12\pi x) - 2, & -1 \leq x < 0 \\ \left(\sin 24\pi + \frac{\pi}{2} \right) + 2, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(c)} \quad f &= \begin{cases} 0, & -1 \leq x < 0 \\ e^{x-1} \sin(32\pi x), & 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \\ \text{(d)} \quad f &= \sin(2\pi e^{x+1} x), \quad -1 \leq x \leq 1 \end{aligned}$$

测试所用网格数均为 $N=192$ 。(a)用于验证尺度识别器对于标准的正弦波($k=\frac{\pi}{6}$,即每个波长用 12 个点表示)的识别效果;(b)可以测试尺度识别器对间断和不同频率正弦波($k=\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}$)的识别效果,该算例可以用于模拟声波在不同固体介质界面处的折射过程;(c)用于验证尺度识别器对间断和幅值增加的正弦波($k=\frac{\pi}{3}$)的识别结果;(d)可以验证尺度识别器能否正确识别频率增加的正弦波波数。测试结果如图 7 所示。



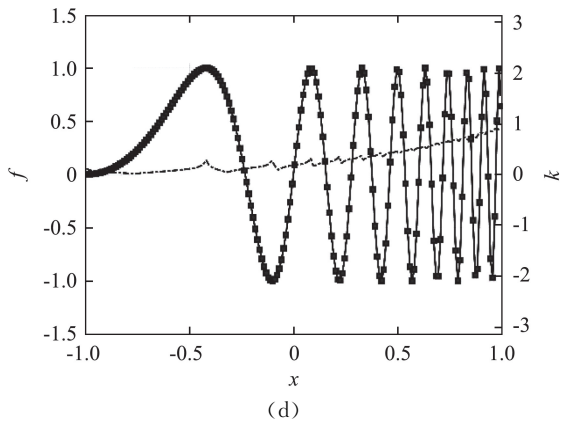


图 7 尺度识别器测试结果

(方块实线为指定函数,点划线为等效无量纲波数)

Fig.7 Distributions of the scale sensor for assigned functions (the square symbols). Dash-dotted lines represent the effective scaled wavenumbers. The triangle symbols (see scale on the right axis) denote values of the scale sensor.

由测试结果可知,尺度识别器能够准确地识别标准正弦波的无量纲波数,对于幅值增加和频率增加的正弦波识别效果也很好。式(38)通过各阶导数的恰当组合,有效抑制了等效无量纲波数在极值点和拐点处的振荡。而对于间断,尺度识别器往往将其识别为一个高频成分,这也与物理事实相吻合。

2.2 MDAD 格式

2.1 节已经介绍了可以用于判断流场局部等效无量纲波数的尺度识别器,为了构造耗散自适应的 MDAD 格式,需要根据等效无量纲波数对式(7)中的耗散参数 γ_{diss} 进行动态的调整。此时, γ_{diss} 在全场不再是一个常数。为了更清楚地介绍 MDAD 格式的构造过程,可以将式(7)改写为:

$$\begin{aligned} \hat{f}_{j+\frac{1}{2}} = & \frac{1}{\Delta x} \left[\left(\frac{1}{2} \gamma_{\text{disp}} + \frac{1}{2} (\gamma_{\text{diss}})_{j+\frac{1}{2}} \right) f_{j-2} + \right. \\ & \left(-\frac{3}{2} \gamma_{\text{disp}} - \frac{5}{2} (\gamma_{\text{diss}})_{j+\frac{1}{2}} - \frac{1}{12} \right) f_{j-1} + \\ & \left(\gamma_{\text{disp}} + 5 (\gamma_{\text{diss}})_{j+\frac{1}{2}} + \frac{7}{12} \right) f_j + \\ & \left(\gamma_{\text{disp}} - 5 (\gamma_{\text{diss}})_{j+\frac{1}{2}} + \frac{7}{12} \right) f_{j+1} + \\ & \left(-\frac{3}{2} \gamma_{\text{disp}} + \frac{5}{2} (\gamma_{\text{diss}})_{j+\frac{1}{2}} - \frac{1}{12} \right) f_{j+2} + \\ & \left. \left(\frac{1}{2} \gamma_{\text{disp}} - \frac{1}{2} (\gamma_{\text{diss}})_{j+\frac{1}{2}} \right) f_{j+3} \right] \end{aligned} \quad (39)$$

为了实现自适应耗散, $(\gamma_{\text{diss}})_{j+\frac{1}{2}}$ 由耗散参数与等效无量纲波数的关系得出:

$$(\gamma_{\text{diss}})_{j+\frac{1}{2}} = \gamma_{\text{diss}}(k_{j+\frac{1}{2}}) \quad (40)$$

其中 $k_{j+\frac{1}{2}}$ 由式(37)计算得到。

Li 等^[25]采用 Hu 等^[23]提出的色散耗散条件指导式(40)的设计。需要注意的是色散耗散条件是在傅里叶空间中的关系,然而自适应耗散应该在物理空间中实施。因此,使用该条件时需要格外小心。不过对于单一正弦波,等效无量纲波数即为精确的正弦波波数,此时色散耗散条件可以很容易的使用。从这个角度考虑,使用色散耗散条件设计式(40)也可以看作是一个校准的过程,即以单一正弦波为例,采用色散耗散条件构造耗散参数与等效无量纲波数之间的关系,并应用于更一般的情况。需要注意的是,式(40)也可以基于经验或者物理意义进行设计,这一问题将在接下来的工作中继续研究。

1.1 节中提到,当限制色散耗散比值 $r(\pi) \leq 9$ 时,满足条件的最小耗散参数为 $\gamma_{\text{diss}} = 0.012$ 。考虑到 MDAD 格式的色散和耗散特性均为已知函数,则当 r 固定时,可以反推不同波数下所需的耗散参数。将式(14)代入式(16)可以得到耗散参数与波数的关系式:

$$\gamma_{\text{diss}} = \frac{\left| \frac{\partial \Re(k')}{\partial k} - 1 \right|}{r |g[\cos(k)]|} \quad (41)$$

令 $r=9$ 并限制 $0 \leq \gamma_{\text{diss}} \leq \min(\gamma_{\text{disp}}, \frac{1}{9} - \frac{1}{3} \gamma_{\text{disp}})$ (该限制条件将在下一节中详细介绍),可以得到耗散参数关于波数的变化曲线,如图 8 所示。

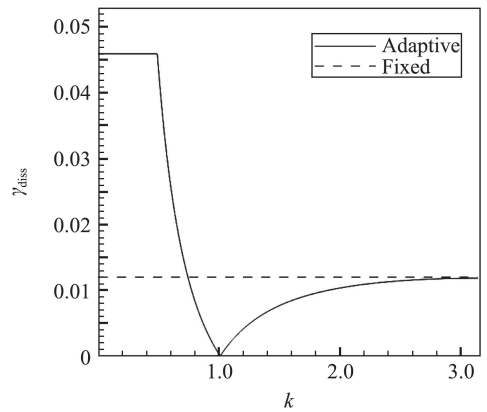


图 8 耗散参数与波数的关系

(实线为自适应耗散参数,虚线为固定的耗散参数 0.012)

Fig.8 The relation between the dissipation parameter and the wave number. The solid and dashed lines are respectively the adaptive and fixed dissipation parameter.

由图可知,耗散参数随波数的变化可以分为左右两支,交点为 $(1.012, 0)$ 。在低波数段 ($k \leq 1.012$), 由于 $|g[\cos(k)]|$ 较小,反解得到的 γ_{diss} 一开始较大,之后逐渐减小为 0。而在高波数段 ($k > 1.012$), 随着波数的增高,色散误差增加变快, $\left| \frac{\partial \Re(k')}{\partial k} - 1 \right|$ 变大, γ_{diss} 逐渐从 0 增加到趋于 0.012。

当 $k \leq 1.012$ 时,每个波长大约由 6 个点表示,此时格式的色散误差较小,可以视为能够精确求解的情况,因此我们直接令耗散参数为 0。而对于高波数段,可以采用式(41)的计算结果,并进行曲线拟合,最终得到一个分段函数关系:

$$(\gamma_{\text{diss}})_{j+\frac{1}{2}} = \begin{cases} 0 & , \quad 0 \leq k_{j+\frac{1}{2}} \leq 1.012 \\ 0.00862 \arctan(2.594(k_{j+\frac{1}{2}} - 1.012)) & , \quad 1.012 < k_{j+\frac{1}{2}} \leq \pi \\ 0.012 & , \quad k_{j+\frac{1}{2}} > \pi \end{cases} \quad (42)$$

通过式(38)计算等效无量纲波数,再采用式(42)得到式(39)中的耗散参数 $(\gamma_{\text{diss}})_{j+\frac{1}{2}}$,即可在 MDAD 格式的基础上得到具有耗散自适应调节能力的 MDAD 格式。这种方法可以在流场光滑区实现更高的分辨率,而不影响格式在流场不可解尺度区域的鲁棒性。

为了验证 MDAD 格式相对于 MDAD 的优越性,图 9 展示了这两种格式的色散耗散比值 r 随波数的变化(r 采用 $r = \frac{|\frac{\partial \Re(k')}{\partial k} - 1| + \epsilon}{|\Im(k')| + \epsilon}$ 计算,其中 $\epsilon = 1.1 \times 10^{-3}$ 为小量)。可以看到,MDAD 在高波数段 r 才趋于 9,在中低波数段 r 始终小于 9,而耗散自适应的 MDAD 格式则在较大的波数范围内都有 r 趋于 9,这就说明 MDAD 不仅在高波数段能提供足够的耗散抑制振荡,保证格式的鲁棒性,同时在中低波数段有更小的耗散,可以帮助提高格式的分辨率。

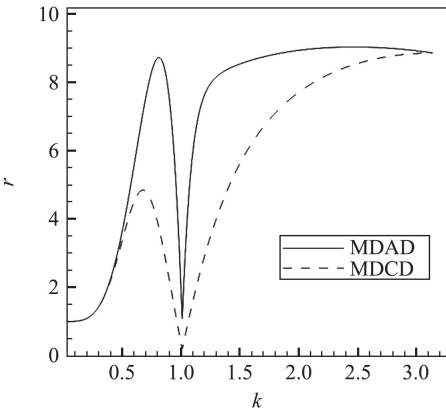


图 9 色散耗散比值 r 随波数的变化曲线

Fig.9 The dispersion-dissipation ratio computed with r

3 混合格式

虽然 MDAD 格式和 MDAD 格式有很好的色散耗散特性,但它们不能直接用于含间断流场的数值模

拟。为了使这些格式具有激波捕捉的能力, Sun 等^[22,24] 和 Li 等^[25] 的方案是首先将这些格式与 WENO 格式相结合,发展相应的非线性格式,之后将线性格式与非线性格式相结合,构造混合格式。由于 MDAD 格式与 MDAD 格式在混合格式构造方面基本一致,本文我们只介绍 MDAD 格式对应的混合格式 MDAD-HY。本节将首先介绍 MDAD-WENO 格式,之后介绍一种新的间断探测器用于 MDAD-HY 格式的构造,并用近似色散关系(ADR)^[26] 对混合格式的谱特性进行分析。需要注意的是,引入自适应耗散机制后,MDAD 格式实际上是非线性的,但为了简便,在后文我们仍然称其为线性格式。

3.1 MDAD-WENO 格式

WENO 格式^[2] 是一类代表性的非线性激波捕捉格式,在含间断流场的数值模拟中有广泛的应用。WENO 格式的基本思想是通过对一系列候选模板上低阶多项式的非线性组合,实现无振荡的激波捕捉能力。为了构造 MDAD-WENO 格式,可以采用包含对称的 6 个模板点的 MDAD 格式作为它的线性部分,这些模板点被划分如图 10 所示的四条候选模板 $\{S_0, S_1, S_2, S_3\}$, 则 MDAD 格式的数值通量可以改写为:

$$\hat{f}_{j+\frac{1}{2}}^{\text{MDAD}} = \sum_{k=0}^3 C_k q_k(x_{j+\frac{1}{2}}) \quad (43)$$

其中 $q_k(x_{j+\frac{1}{2}})$ 是基于模板 S_k 的对界面 $x_{j+\frac{1}{2}}$ 上物理通量 $f_{j+\frac{1}{2}}$ 的三阶插值近似,具体公式如下:

$$\begin{cases} q_0(x_{j+\frac{1}{2}}) = \frac{1}{6}(2f_{j-2} - 7f_{j-1} + 11f_j) \\ q_1(x_{j+\frac{1}{2}}) = \frac{1}{6}(-f_{j-1} + 5f_j + 2f_{j+1}) \\ q_2(x_{j+\frac{1}{2}}) = \frac{1}{6}(2f_j + 5f_{j+1} - f_{j+2}) \\ q_3(x_{j+\frac{1}{2}}) = \frac{1}{6}(11f_{j+1} - 7f_{j+2} + 2f_{j+3}) \end{cases} \quad (44)$$

通过对比式(43)和式(39),可以得到线性权 C_k 是关于 γ_{diss} 和 $(\gamma_{\text{diss}})_{j+\frac{1}{2}}$ 的函数,具体形式在表 1 中给出。

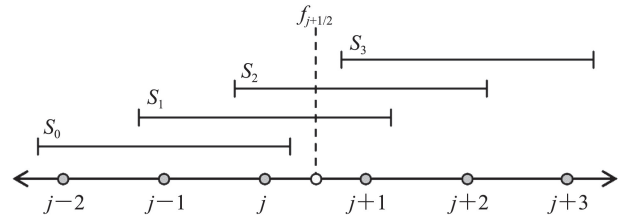


图 10 MDAD 格式数值通量 $\hat{f}_{j+\frac{1}{2}}$ 的候选模板 S_k

Fig.10 The candidate stencil S_k for the numerical flux

$$\hat{f}_{j+\frac{1}{2}} \text{ in the MDAD-WENO scheme}$$

表 1 线性权 C_k 关于 γ_{disp} 和 $(\gamma_{\text{diss}})_{j+\frac{1}{2}}$ 的表达式Table 1 The optimal weight C_k determined by γ_{disp} and $(\gamma_{\text{diss}})_{j+\frac{1}{2}}$

C_0	C_1
$\frac{3}{2}[\gamma_{\text{disp}} + (\gamma_{\text{diss}})_{j+\frac{1}{2}}]$	$\frac{1}{2} - \frac{3}{2}[\gamma_{\text{disp}} - 3(\gamma_{\text{diss}})_{j+\frac{1}{2}}]$
C_2	C_3
$\frac{1}{2} - \frac{3}{2}[\gamma_{\text{disp}} + 3(\gamma_{\text{diss}})_{j+\frac{1}{2}}]$	$\frac{3}{2}[\gamma_{\text{disp}} - (\gamma_{\text{diss}})_{j+\frac{1}{2}}]$

可以看到, 2.2 节中提到的限制条件 $0 \leq \gamma_{\text{diss}} \leq \min\left(\gamma_{\text{disp}}, \frac{1}{9} - \frac{1}{3}\gamma_{\text{disp}}\right)$ 是为了保证线性权 C_k 均为非负值, 这就使得式(43)是候选模板上多项式的凸组合。对于 MDAD-WENO 格式, 数值通量可以写为:

$$\hat{f}_{j+\frac{1}{2}}^{\text{MDAD-WENO}} = \sum_{k=0}^3 \omega_k q_k(x_{j+\frac{1}{2}}) \quad (45)$$

其中 q_k 与式(43)意义相同, ω_k 为 WENO 格式的非线性权, 与对应候选模板 S_k 上解的光滑性有关。MDAD-WENO 的非线性权采用与 Jiang 和 Shu^[2] 相同的形式:

$$\omega_k = \frac{C_k}{(\beta_k + \epsilon)^p} \quad (46)$$

$$\sum_{k=0}^3 \frac{C_k}{(\beta_k + \epsilon)^p}$$

其中 C_k 采用表 1 中的关系计算, 因此 MDAD-WENO 格式也是耗散自适应的。 ϵ 为防止分母为 0 的小量, p 与候选模板自适应的敏感性有关, 通常取 $p=2$, 而 β_k 为对应候选模板上解的光滑因子:

$$\beta_k = \sum_{m=1}^2 \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} (\Delta x)^{2m-1} \left[\frac{\partial^m q_k(x)}{\partial x^m} \right]^2 dx \quad (47)$$

代入每个候选模板得到:

$$\begin{cases} \beta_0 = \frac{1}{4}(f_{j-2} - 4f_{j-1} + 3f_j)^2 + \frac{13}{12}(f_{j-2} - 2f_{j-1} + f_j)^2 \\ \beta_1 = \frac{1}{4}(f_{j-1} - f_{j+1})^2 + \frac{13}{12}(f_{j-1} - 2f_j + f_{j+1})^2 \\ \beta_2 = \frac{1}{4}(3f_j - 4f_{j+1} + f_{j+2})^2 + \frac{13}{12}(f_j - 2f_{j+1} + f_{j+2})^2 \\ \beta_3 = \frac{1}{4}(5f_{j+1} - 8f_{j+2} + 3f_{j+3})^2 + \frac{13}{12}(f_{j+1} - 2f_{j+2} + f_{j+3})^2 \end{cases} \quad (48)$$

然而需要注意的是, 与 WENO-JS 不同, MDAD-WENO 是采用对称的模板, 正如文献[8]中所说, 它的候选模板 S_3 包含的全部为顺风模板点, 当该模板的非线性权 ω_3 大于其他非线性权时, 有可能会引起格式的不稳定, 因此, 在式(48)计算完所有非线性权之后, 需要对 β_3 增加额外的限制,

$$\beta_3 = \max_{0 \leq k \leq 3} \beta_k \quad (49)$$

以此来限制非线性权 ω_3 不大于其他线性权, 保证格式的稳定性。

3.2 MDAD-HY 格式

WENO 格式能够很好地捕捉流场中的间断, 但是相比对应的线性格式, 由于引入了非线性机制, 色散耗散特性往往会变差^[26]。为了在提高格式分辨率的同时仍然保持良好的间断捕捉能力, 一种思路是采用合适的方法将 WENO 格式与谱特性良好的线性格式进行混合, 在流场光滑区采用线性格式, 在间断附近采用 WENO 格式。文献[25]对 MDAD 格式和 MDAD-WENO 格式进行组合, 构造了具有耗散自适应、低色散特性的四阶有限差分混合格式(MDAD-HY)。

MDAD-HY 格式的数值通量可表示为:

$$\hat{f}_{j+\frac{1}{2}} = \sigma_{j+\frac{1}{2}} \hat{f}_{j+\frac{1}{2}}^{\text{MDAD}} + (1 - \sigma_{j+\frac{1}{2}}) \hat{f}_{j+\frac{1}{2}}^{\text{MDAD-WENO}} \quad (50)$$

其中 $\hat{f}_{j+\frac{1}{2}}^{\text{MDAD}}$ 和 $\hat{f}_{j+\frac{1}{2}}^{\text{MDAD-WENO}}$ 分别为 MDAD 格式和 MDAD-WENO 格式计算得到的数值通量, $\sigma_{j+\frac{1}{2}}$ 是一个间断探测器, 在光滑区接近 1, 而在间断附近接近 0。显然间断探测器的精度对混合格式的分辨率和鲁棒性有很大影响。Ren 等^[13]提出了一种间断探测器, 采用连续函数来避免格式的突然切换, 其具体形式为:

$$\sigma_{j+\frac{1}{2}} = \min\left(1, \frac{\psi_{j+\frac{1}{2}}}{\psi_c}\right) \quad (51)$$

式(51)中的 $\psi_{j+\frac{1}{2}}$ 用于反映界面 $x_{j+\frac{1}{2}}$ 附近的流场光滑程度, 定义如下:

$$\psi_{j+\frac{1}{2}} = \min(\psi_j, \psi_{j+1}) \quad (52)$$

其中,

$$\psi_j = \frac{|2(f_{j+1} - f_j)(f_j - f_{j-1})| + \epsilon}{(f_{j+1} - f_j)^2 + (f_j - f_{j-1})^2 + \epsilon} \quad (53)$$

ϵ 为防止分母为 0 的小量,

$$\epsilon = \frac{0.9\psi_c}{1 - 0.9\psi_c} \xi^2 \quad (54)$$

其中 $\xi = 1 \times 10^{-3}$ 。由式(53)可知, $\psi_j \in [0, 1]$, 且可以反映 x_j 左右两侧一阶导数绝对值的变化情况, 当一阶导数绝对值变化大时, ψ_j 趋于 0, 而一阶导数绝对值变化很小时, ψ_j 趋于 1。 ψ_c 为一个常数, 当 $\psi_{j+\frac{1}{2}} \geq \psi_c$ 时, 认为流场是光滑的, 否则认为流场处在间断区。一般来说 ψ_c 越大, 混合格式的鲁棒性越好, ψ_c 越小, 混合格式的分辨率越高。文献[13]中推荐采用 $\psi_c = 0.3$ 。

在文献[21]中, Zhao 等对一些常见的间断探测器进行了分析。他们的结论是, Ren 等^[13]提出的间

断探测器构造得到的混合格式谱特性较好,但有可能把光滑解的极值点误判为激波。为了解决极点处容易出现误判的问题,Li 等^[25]在 Ren 等^[13]提出的间断探测器基础上,结合尺度识别器,提出了一种新的间断探测器。其基本思路是在进行间断探测前,先利用尺度识别器将大尺度的光滑区分离。当尺度识别器识别得到的等效无量纲波数较低($k \leq k_c$)时,可以认为流场的局部长度尺度较大,处在光滑区,此时直接令 $\sigma_{j+\frac{1}{2}} = 1$ 。其中 k_c 为临界波数,文献[25]中推荐采用 $k_c = 1.0$ 。当识别得到的等效无量纲波数较高($k > k_c$),流场的局部长度尺度较小,可能处在间断附近或者高频的光滑区,此时再利用式(51)~式(54)进行判断。新的间断探测器可以写为:

$$\sigma_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1 + \text{sign}(k_c - k)}{2} + \frac{1 - \text{sign}(k_c - k)}{2} \min\left(1, \frac{\psi_{j+\frac{1}{2}}}{\psi_c}\right) \quad (55)$$

为了验证新的间断探测器的效果,我们将其与 Harten^[15]、Jameson 等^[16]以及 Ren 等^[13]提出的基于一阶导或者二阶导的间断探测器进行比较。Harten 的间断探测器同样基于流场梯度的变化,具体形式如下:

$$\psi_{j+\frac{1}{2}} = 1 - \frac{|f_{j-1} - 2f_j + f_{j+1}|}{|f_{j-1} - f_j| + |f_j - f_{j+1}| + \epsilon} \quad (56)$$

$$\sigma_{j+\frac{1}{2}} = \begin{cases} 0 & , \quad \psi_{j+\frac{1}{2}} < \psi_c \\ 1 & , \quad \text{otherwise} \end{cases} \quad (57)$$

其中,阈值 $\psi_c = 0.3$, ϵ 为防止分母为 0 的小量。而 Jameson 提出的间断探测器基于归一化的二阶导数:

$$\psi_{j+\frac{1}{2}} = 1 - \frac{|f_{j-1} - 2f_j + f_{j+1}|}{|f_{j-1}| + 2|f_j| + |f_{j+1}| + \epsilon} \quad (58)$$

$$\sigma_{j+\frac{1}{2}} = \begin{cases} 0 & , \quad \psi_{j+\frac{1}{2}} < \psi_c \\ 1 & , \quad \text{otherwise} \end{cases} \quad (59)$$

其中,阈值 $\psi_c = \frac{63}{64}$ 。注意此处采用的阈值与原始参考文献[15-16]中推荐的基本一致。

采用 2.1 节中的(b)算例对间断探测器进行静态测试,结果如图 11 所示。可以看到, Harten 和 Jameson 的间断探测器能够识别间断,但是在正弦波光滑区都出现大量误判,这将严重影响混合格式的分辨率。Ren 提出的间断探测器识别效果相对较好,但在光滑区部分极点附近也存在误判。Li 提出的新的间断探测器不仅能够准确识别间断,而且由于引入了尺度识别器的结果进行截断,光滑区的识别结果得到很大改善。

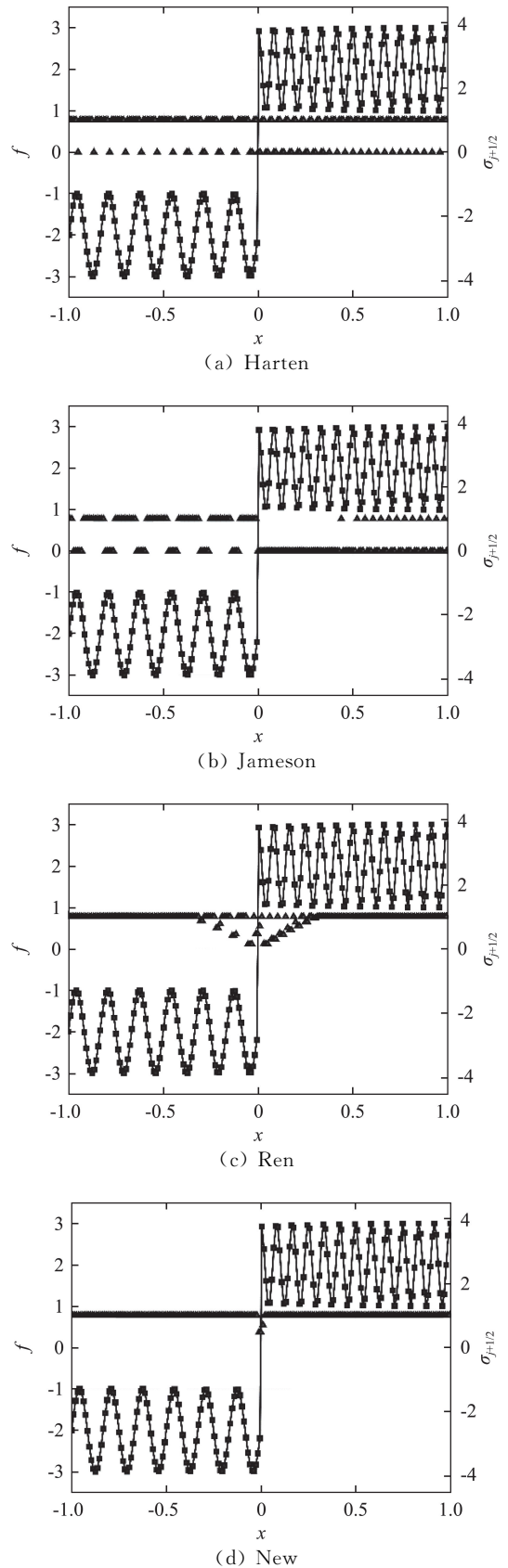


图 11 间断探测器静态测试结果
(方块实线为指定函数,三角为 $\sigma_{j+\frac{1}{2}}$)

Fig.11 Distributions of shock detectors for test (b) in Section 2.2 (the square symbols). The triangle symbols (see scale on the right axis) denote values of shock detectors.

为了进一步验证间断探测器的效果,可以在整个波数空间内对其进行测试。类似于文献[21]中的方法,图 12 展示了间断探测器对于不同波数的正弦波测试得到的所有网格上的 $\sigma_{j+\frac{1}{2}}$ 的平均值。考虑到 $\text{mean}(\sigma_{j+\frac{1}{2}}) < 1$ 表示在网格某处 WENO 格式被激活, $\sigma_{j+\frac{1}{2}}$ 的平均值可以用来判断间断探测器的识别效率。由图可知, Harten 和 Ren 的间断探测器在波数很低时就已经开始出现误判, Jameson 在 $k < 0.25$ 时能够正确识别正弦波,但是之后误判明显增多, $\sigma_{j+\frac{1}{2}}$ 迅速减小为 0。而 Li 提出的新的间断探测器则在 $k < 1$ 内均有良好的测试结果,识别效率最高,有利于提高混合格式在光滑区的分辨率。

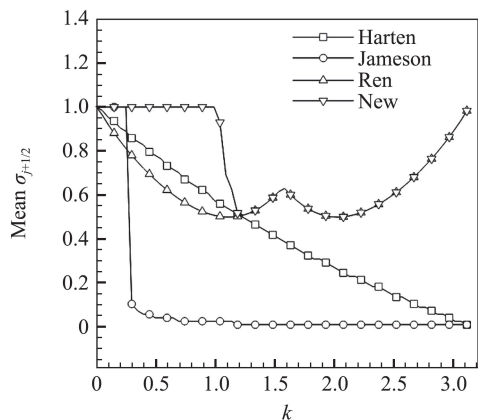


图 12 间断探测器在不同波数下测试得到的 $\sigma_{j+\frac{1}{2}}$ 的平均值

Fig.12 Distributions of the mean values of various shock detectors as a function of wavenumber

3.3 MDAD-HY 格式的谱特性

线性格式的色散耗散特性可由傅里叶分析得到,但是对于非线性格式,目前还没有解析的分析谱特性的方法。Pirozzoli^[26]提出一种近似色散关系 (Approximate Dispersion Relation, ADR), 可以数值地计算非线性的激波捕捉格式的修正波数,从而得到非线性格式近似的色散耗散特性。本节将利用 ADR 分析 MDAD-HY 格式的色散耗散特性,并与原始的 MDCD-HY 格式^[22]进行对比。

图 13 展示了不同格式的近似耗散特性, Jiang 和 Shu^[2]提出的 WENO 格式 (即图中的 WENO-JS), Borghers^[5]提出的 WENO-Z 格式,以及 Sun 等^[22]提出的线性 MDCD 格式也被引入作为参考。可以看到, WENO-Z 的耗散小于 WENO-JS, 但是仍比两种混合格式要大。混合格式 MDCD-HY 和 MDAD-HY 的耗散特性在低波数和高波数段与线性 MDCD 格式接近,但在中波数段耗散变大。通过局部放大,可以观察到 MDAD-HY 在 $k < 1.04$ 时耗散为 0, 小于 MDCD-HY 的耗散,之后随着波数的增加,耗散逐渐

增大,直到 $k > 2.5$ 后 MDAD-HY 的耗散特性曲线与 MDCD-HY 基本接近。这就说明 MDAD-HY 格式在低波数段相比 MDCD-HY 有更好的分辨率,而在高波数段能提供和 MDCD-HY 相似的耗散来抑制数值振荡,具有较好的鲁棒性。

图 14 为不同格式的近似色散特性对比,可以看到 MDAD-HY 和 MDCD-HY 的色散特性非常接近,在高波数段稍差于 MDCD,但远好于 WENO-JS 和 WENO-Z。

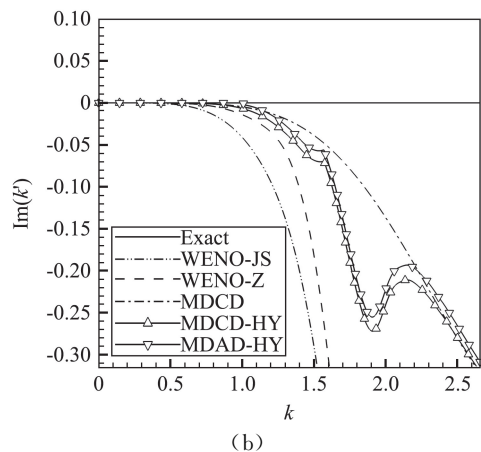
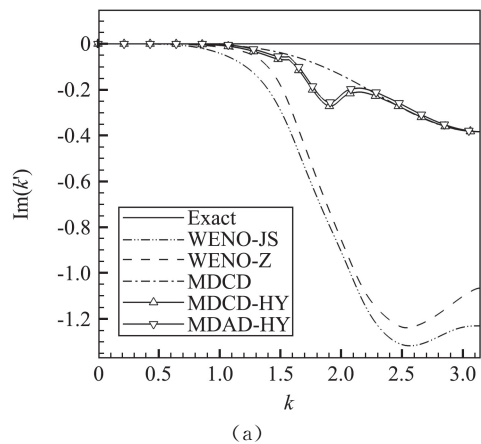


图 13 不同格式的近似耗散特性 (其中 (b) 是 (a) 的局部放大)
Fig.13 Comparisons of dissipation properties for various nonlinear schemes. (b) is the enlarged portion of (a) in the low to medium wavenumber range

4 MDCD 格式的发展应用与 MDAD 格式的算例测试

前面我们以线性波动方程为例介绍了 MDCD 和 MDAD 格式, 这些算法很容易推广到 Euler 方程和 N-S 方程。具体方案是: 采用特征分解^[29]的方法计算无黏数值通量, 尺度识别器和间断探测器都作用于特征分解后的局部特征通量。更多细节可以参考文献[22, 30]。而黏性通量采用文献[31]中的方法进行计算。时间积分采用低存储的四阶龙格-库塔格

式^[32],也可以采用常见的隐式格式。

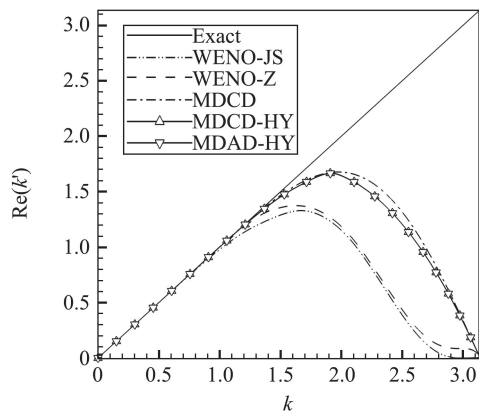


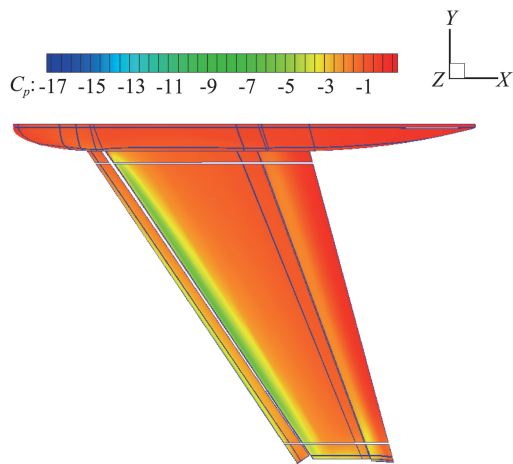
图 14 不同格式的近似色散特性

Fig.14 Comparisons of dispersion properties for various nonlinear schemes

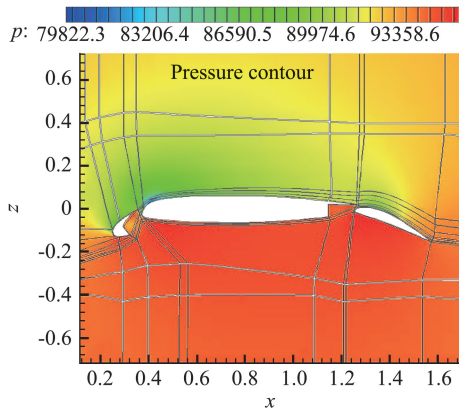
MDCD 格式自提出以来,得到了持续的发展和广泛的应用,而 MDAD 格式及其对应的混合格式 MDCD-HY 最近才被提出。因此在本节中,对于 MDCD 格式我们主要介绍其发展和应用,而对于 MDAD 格式,我们主要介绍其在求解一些标准算例中的表现。

4.1 MDCD 格式的发展及应用

MDCD 格式^[22]自提出以来,得到了一定的发展和应用。原始 MDCD 格式是四阶精度的,Sun 等^[24]研究了六阶精度的 MDCD 格式,并初步研究了耗散控制问题。Wang 等^[33]将 MDCD 格式推广到有限体积格式,通过采用多块结构网格,使算法具备了模拟复杂几何外形的能力。图 15 是用有限体积 MDCD 格式得到的 AIAA CFD HiLiftPW-1 多段翼模型标准算例的压力分布云图。图 16 是 41%翼展的压力系数分布,对比同样网格上 MUSCL 格式的计算结果,可以看到 MDCD 格式预测的压力分布更接近实验结果。



(a) 机身压力分布云图



(b) 多段翼横截面压力云图

图 15 多段翼算例压力分布

Fig.15 The pressure distribution of a multi segment wing

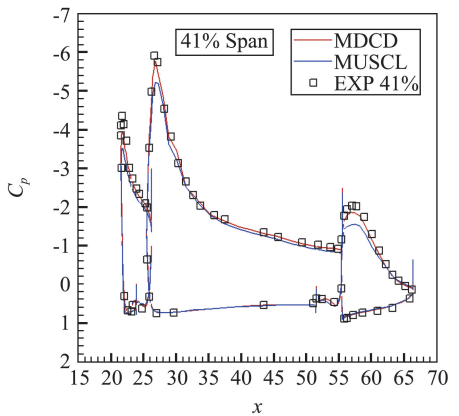


图 16 41%翼展压力系数分布

Fig.16 The pressure coefficient distribution of the 41% span

文献[34-35]将 MDCD 格式发展到求解多介质复杂流动,并研究了激波与多物质界面作用产生的界面不稳定性与湍流混合问题。图 17 是激波与氦气泡作用后,界面失稳的形态。

此外,Li等^[36]、Chen等^[37]利用MDCD格式耗散

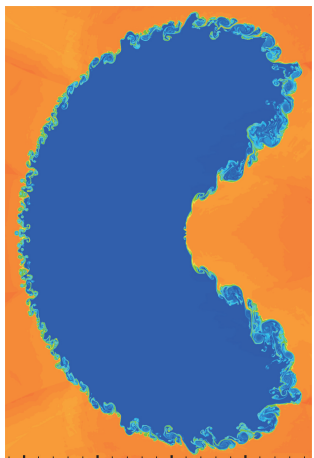


图 17 激波与氦气泡作用后的界面不稳定性

Fig.17 The interface instability due to the interaction between a helium bubble and a shock wave

可调的特点,研究了 MDCD 格式的耗散对隐式大涡模拟的影响。Jiang 等^[38]把 MDCD 格式与 SIMPLE 算法相结合,将 MDCD 格式推广到求解不可压缩流动,显著提高了算法的分辨率。Duan 等^[39-40]把 MDCD 格式应用于高超声速边界层粗糙元诱发转捩问题的直接数值模拟,Jiang 等^[41]把 MDCD 格式应用于低压涡轮分离诱导转捩的预测,Yang 等^[42]把 MDCD 格式应用于基于涡流发生器的流动控制研究。这些应用充分说明了 MDCD 格式解决实际科学与工程问题的能力。

4.2 MDAD 格式算例测试

MDAD 格式是 MDCD 格式的进一步发展,本节通过典型算例说明 MDAD 格式具有比采用传统耗散控制方法的 MDCD 格式具有更好的性能。由于篇幅的限制,我们只介绍二维无黏和黏性流动两个算例,更多的测试算例请参见文献[25]。

4.2.1 双马赫反射问题

考虑文献[43]中提到的双马赫反射问题作为二维验证算例。该算例的控制方程为二维 Euler 方程。一个马赫数为 10、与 x 轴夹角为 60° 的激波向右移动,并与下壁面发生反射。初始条件如下:

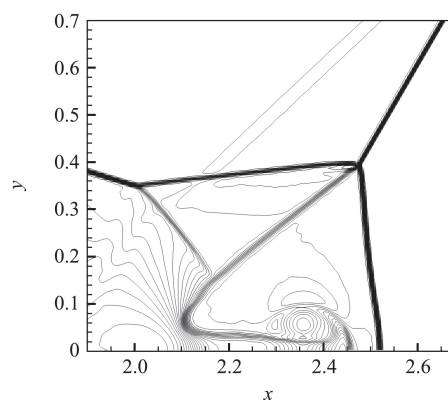
$$(\rho, u, v, p) = \begin{cases} (1.4, 0, 0, 1.0) & , \quad x > x_0 + \sqrt{3}/3y \\ (8.0, 7.1447, -4.125, 116.5) & , \quad \text{otherwise} \end{cases}$$

其中 $x_0 = 1/6$, 计算域为 $(x, y) \in [0, 4] \times [0, 1]$ 。边界条件方面,在下边界,为了使激波附着在壁面前缘, $x \in [0, x_0]$ 段采用激波后的参数,而 $x \in [x_0, 4]$ 段为滑移壁面。入口和出口分别采用来流和出流边界条件。上边界采用精确的波前波后参数,并随着激波的运动而变化。

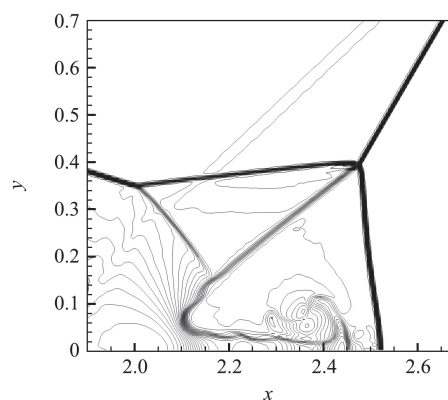
图 18 展现了计算时间 $t = 0.18$ 时不同格式的密度等值线,网络量采用 800×200 , 库朗数 $N_c = 0.3$ 。可以看到, WENO-JS、WENO-Z、MDCD-HY 和 MDAD-HY 均能很好地捕捉到流场结构,包括马赫杆和壁面射流。但是,MDAD-HY 在第二个三波点附近的涡结构明显更加细致,对小尺度结构捕捉更好。这说明相比于其他三种格式,MDAD-HY 格式有着更高的分辨率。

4.2.2 弱激波与等熵涡相互作用问题

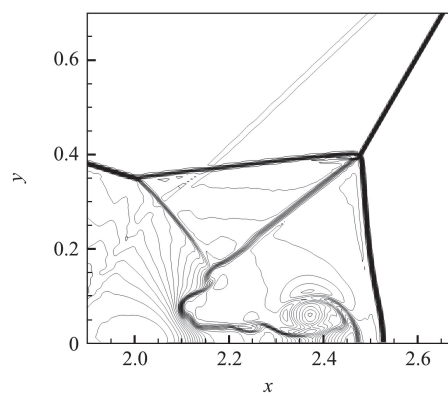
为了研究不同格式在二维 N-S 方程中的效果,可以考察带有黏性的弱激波与等熵涡的相互作用问题^[44]。该算例的计算域为 $[0, 2L_0] \times [0, 2L_0]$, 其中参考长度 $L_0 = 1.0$ 。一个静止的平面激波位于 $x =$



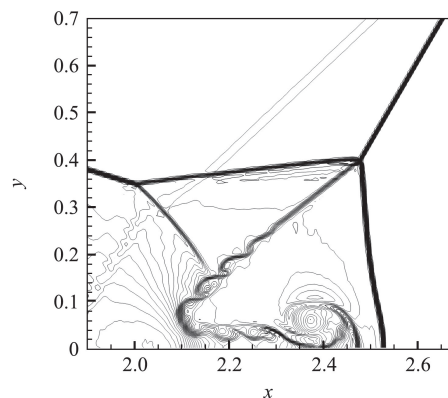
(a) WENO-JS



(b) WENO-Z



(c) MDCD-HY



(d) MDAD-HY

图 18 双马赫反射算例 $t = 0.18$ 时的密度等值线 (50 等分)

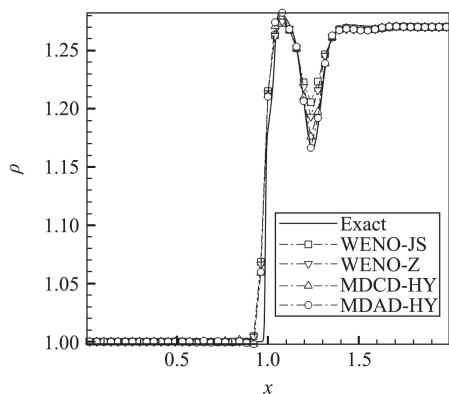
Fig.18 Density contours for the double Mach reflection problem at $t = 0.18$. Contour levels are equally spaced.

1.0,波前来流参数为 $\rho_0 = 1.0$, $p_0 = 1/\gamma$, 预设的激波前后压差为 $\Delta p/p_0 = 0.4$, 对应的激波强度为 $M_0 = 1.1588$, 其余的流场参数由 Rankine-Hugoniot 关系确定。雷诺数 $Re = 5000$, 它的参考长度为 L_0 , 参考密度和参考速度均为来流参数。初始状态下, 一个孤立的等熵涡被叠加在来流中, 涡中心位于 $(x_0, y_0) = (0.5, 1.0)$, 它表现为速度 (u, v) 和温度 $T = \gamma p/\rho$ 的扰动, 而熵 $S = p/\rho^\gamma$ 为常数。

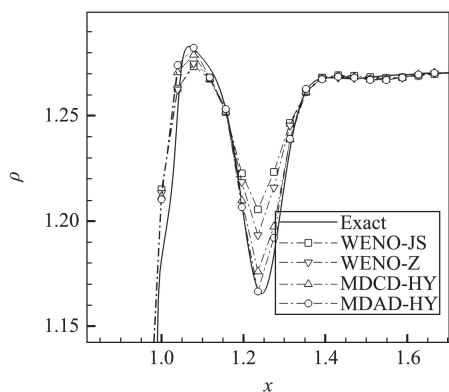
$$(\delta u, \delta v) = \frac{U_c}{R_c} e^{0.5(1 - \frac{r^2}{R_c^2})} (-\bar{y}, \bar{x})$$

$$\delta T = -\frac{\gamma-1}{2} U_c^2 e^{1 - \frac{r^2}{R_c^2}}$$

其中 $R_c = 0.075$, $U_c = 0.25$, 而 $(\bar{x}, \bar{y}) = (x - x_0, y - y_0)$, $r = \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}$ 。左右边界分别采用入口、出口边界条件, 而上下边界采用周期边界条件。计算时间 $t = 0.7$, 库朗数 $N_c = 0.3$ 。为了得到参考解, 采用 WENO-JS 格式在 501×501 的网格上进行计算。在 $t = 0.3$ 时, 等熵涡开始与激波相互作用, 之后逐渐穿过激波。图 19 展示了 $t = 0.7$ 时中心线上的密度分布, 该结果由不同格式在 51×51 的网格上计算得到。可以看到, 对于激波后的涡, 相比于 WENO-JS 格式、WENO-Z 格式和 MDCD-HY 格式, MDAD-HY 格



(a) $t = 0.7$ 时中心线上的密度分布



(b) 为(a)在激波附近的局部放大

图 19 弱激波等熵涡相互作用算例

Fig.19 The weak shock/vortex interaction problem

式得到的结果与参考解最为接近, 说明该格式具有最高的分辨率。

5 结 论

本文综述了我们在有限差分格式的色散优化和耗散控制等方面的工作。相应的计算格式可以计算无激波的光滑解, 也可以作为非线性激波捕捉格式 (如 WENO 格式) 或者混合格式的线性部分。

在理论上, 我们得到了半离散格式色散、耗散独立的充分条件, 使色散优化和耗散控制不相互干扰, 为格式性能优化打下了基础。进一步的分析表明, 即使对于全离散格式, 上述充分条件也可以保证色散和耗散近似独立。

以此为基础, 我们得到了色散最小、耗散可控的 MDCD 格式, 该格式的优良性能已经在一系列应用中得到了验证, 并被推广到有限体积方法, 以及求解多介质流动、不可压流动等。MDCD 格式的主要缺点在于耗散控制。无论是采用试错方法还是基于色散、耗散条件确定通用耗散参数, 得到的格式在耗散特性方面仍有很大的改进空间。

为了解决耗散控制问题, 我们提出了将数值耗散与数值解的尺度相关联的思路。为此, 我们首先提出了一种基于数值通量模板点上导数的尺度识别器, 用于判断流场局部的等效无量纲波数。然后通过色散耗散条件^[23], 设计出耗散参数与等效无量纲波数之间的关系, 从而实现耗散参数的自适应调节, 提出了色散最小、耗散自适应的 MDAD 格式。

我们通过所发展的格式与 WENO 格式相混合的方法, 使 MDCD 和 MDAD 格式在能够高精度、高分辨率的求解光滑流动的同时, 具有鲁棒的激波捕捉能力。我们发现, 通过在混合格式的激波探测器中, 引入基于尺度识别器的修正, 可以进一步提高混合格式的性能。

由于 MDCD 格式的性能已经得到了充分的验证, 且 MDAD 格式在多个标准算例中都表现出优于 MDCD 格式的性能, 可以预见, MDAD 格式及其对应的混合格式 MDAD-HY 在求解含激波的复杂多尺度流动中也有很好的应用前景。

致谢: 李万爱、潘建华、曾卫刚、黄文锋、李星辉、张宏杰、李俊涛、张润东等参与了计算程序开发、验证、应用等工作, 特致感谢。

参 考 文 献:

- [1] LIU X D, OSHER S, CHAN T. Weighted essentially non-oscillatory schemes [J]. Journal of Computational Physics, 1994, 115: 200-212.

- [2] JIANG G S, SHU C W. Efficient implementation of weighted ENO schemes[J]. *Journal of Computational Physics*, 1996, 126: 202-228.
- [3] JOHNSEN E, LARSSON J, BHAGATWALA A V, et al. Assessment of high-resolution methods for numerical simulations of compressible turbulence with shock waves[J]. *Journal of Computational Physics*, 2010, 229(4): 1213-1237.
- [4] HENRICK A K, ASLAM T A, POWERS J M. Mapped weighted essentially non-oscillatory schemes: achieving optimal order near critical points[J]. *Journal of Computational Physics*, 2007(2): 542-567.
- [5] BORGES R, CARMONA M, COSTA B, et al. An improved weighted essentially non-oscillatory scheme for hyperbolic conservation laws[J]. *Journal of Computational Physics*, 2008, 227: 3191-3211.
- [6] 刘朋欣, 李沁, 张涵信. 基于映射函数的中心型三阶格式[J]. *空气动力学学报*, 2017, 35(1): 71-77. (in Chinese)
LIU P X, LI Q, ZHANG H X. A kind of third order central scheme based on mapping functions[J]. *Acta Aerodynamica Sinica*, 2017, 35(1): 71-77.
- [7] TAYLOR E M, WU M, MARTIN M P. Optimization of nonlinear error for weighted essentially non-oscillatory methods in direct numerical simulations of compressible turbulence[J]. *Journal of Computational Physics*, 2007, 223: 384-397.
- [8] MARTIN M P, TAYLOR E M, WU M, et al. A bandwidth-optimized WENO scheme for effective direct numerical simulation of compressible turbulence [J]. *Journal of Computational Physics*, 2006, 220: 270-289.
- [9] HU X Y, WANG Q, ADAMS N A. An adaptive central-upwind weighted essentially non-oscillatory scheme[J]. *Journal of Computational Physics*, 2010, 229: 8952-8965.
- [10] FU L, HU X Y, ADAMS N A. A family of high-order targeted ENO schemes for compressible-fluid simulations[J]. *Journal of Computational Physics*, 2016, 305: 333-359.
- [11] ADAMS N A, SHARIFF K. A high-resolution hybrid compact-ENO scheme for shock/turbulence interaction problems[J]. *Journal of Computational Physics*, 1996, 127: 27-51.
- [12] PIROZZOLI S. Conservative hybrid compact-WENO schemes for shock-turbulence interaction[J]. *Journal of Computational Physics*, 2002, 178: 81-117.
- [13] REN Y X, LIU M, ZHANG H X. A characteristic-wise compact WENO scheme for solving hyperbolic conservation laws[J]. *Journal of Computational Physics*, 2003, 192: 365-386.
- [14] 武从海, 赵宁, 田琳琳. 一种改进的紧致 WENO 混合格式[J]. *空气动力学学报*, 2013, 31(4): 477-481.
WU C H, ZHAO N, TIAN L L. An improved hybrid compact-WENO scheme[J]. *Acta Aerodynamica Sinica*, 2013, 31(4): 477-481. (in Chinese)
- [15] HARTEN A. The artificial compression method for computation of shocks and contact discontinuities. III. Self-adjusting hybrid schemes[J]. *Mathematics of Computation*, 1978, 32(142): 363-389.
- [16] JAMESON A, SCHMIDT W, TURKEL E. Numerical solution of the Euler equations by finite volume methods using Runge-Kutta time stepping schemes [C]//Proceeding of the 14th AIAA Fluid and Plasma Dynamics Conference, 1981.
- [17] SJOGREEN B, YEE H C. Multiresolution wavelet based adaptive numerical dissipation control for shock-turbulence computations[J]. *Research Institute for Advanced Computer Science*, 2001, 1: 1-43.
- [18] HILL D J, PULLIN D I. Hybrid tuned center-difference-WENO method for large eddy simulations in the presence of strong shocks[J]. *Journal of Computational Physics*, 2004, 194(2): 435-450.
- [19] VISBAL M, GAITONDE D. Shock capturing using compact-differencing-based methods[C]//Proceeding of the 43rd AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, 2005.
- [20] MOVAHED P, JOHNSEN E. A solution-adaptive method for efficient compressible multifluid simulations with application to the Richtmyer-Meshkov instability [J]. *Journal of Computational Physics*, 2013, 239: 166-186.
- [21] ZHAO G Y, SUN M B, PIROZZOLI S. On shock sensors for hybrid compact/WENO schemes[J]. *Computers and Fluids*, 2020, 199: 104439.
- [22] SUN Z S, REN Y X, LARRICQ C, et al. A class of finite difference scheme with low dispersion and controllable dissipation for DNS of compressible turbulence[J]. *Journal of Computational Physics*, 2011, 230: 4616-4635.
- [23] HU X Y, ADAMS N A. Dispersion-dissipation condition for finite difference schemes [EB/OL]. <https://www.researchgate.net/publication/224812783>, 2012-04-23/2020-08-18.
- [24] SUN Z S, LUO L, REN Y X, et al. A sixth order hybrid finite difference scheme based on the minimized dispersion and controllable dissipation technique[J]. *Journal of Computational Physics*, 2014, 270: 238-254.
- [25] LI Y H, CHEN C W, REN Y X. A class of high-order finite difference schemes with minimized dispersion and adaptive dissipation for solving compressible flows[J]. Submitted to *Journal of Computational Physics*.
- [26] PIROZZOLI S. On the spectral properties of shock-capturing schemes[J]. *Journal of Computational Physics*, 2006, 219: 489-497.
- [27] HU F Q, HUSSAINI M Y, MANTHEY J L. Low-dissipation and low-dispersion Runge-Kutta schemes for computational acoustics[J]. *Journal of Computational Physics*, 1996, 124: 177-191.
- [28] LI L, YU C P, CHEN Z, et al. Resolution-optimised nonlinear scheme for secondary derivatives[J]. *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, 2016, 30(2): 107-119.
- [29] SHU C W. High order ENO and WENO schemes for computational fluid dynamics[M]. Berlin: Springer, 1999, 439-582.
- [30] SUN Z S, REN Y X. The development of the characteristic-wise hybrid compact-WENO scheme for solving the Euler and Navier-Stokes equations [J]. *Computational Fluid Dynamics Review* 2010, 2010, 1: 279-297.
- [31] SHEN Y Q, YANG B Y, ZHA G C. Implicit WENO scheme and high order viscous formulas for compressible flows[C]//Proceeding of the 25th AIAA Applied Aerodynamics Conference, 2007.
- [32] SHU C W. Advanced numerical approximation of nonlinear hyperbolic equations[M]. Berlin: Springer, 2006, 325-432.
- [33] WANG Q J, REN Y X, SUN Z S, et al. Low dispersion finite volume scheme based on reconstruction with minimized dispersion and controllable dissipation [J]. *Science China Physics, Mechanics & Astronomy*, 2013, 56: 423-431.
- [34] WANG Q J, DEITERDING R, PAN J H, et al. Consistent high resolution interface-capturing finite volume method for compressible multi-material flows[J]. *Computers and Fluids*, 2020, 202: 104518.

- [35] ZENG W G, PAN J H, SUN Y T, et al. Turbulent mixing and energy transfer of reshocked heavy gas curtain[J]. *Physics of Fluids*, 2018, 30(6): 064106.
- [36] LI Z, ZHANG Y, CHEN H. A low dissipation numerical scheme for implicit large eddy simulation[J]. *Computers & Fluids*, 2015, 117: 233-246.
- [37] CHEN H, LI Z, ZHANG Y. U or V shape: dissipation effects on cylinder flow implicit large-eddy simulation [J]. *AIAA Journal*, 2017, 55(2): 459-473.
- [38] JIANG S, FU S. Modifications to the SIMPLE algorithm with the MDCD approach for incompressible flow simulation[J]. *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, 2018.
- [39] DUAN Z W, XIAO Z X, FU S. Direct numerical simulation of hypersonic transition induced by an isolated cylindrical roughness element[J]. *SCIENCE CHINA Physics, Mechanics & Astronomy*, 2014, 57(12): 2330-2345.
- [40] 段志伟, 肖志祥. 粗糙元诱导的高超声速边界层转捩[J]. *航空学报*, 2016, 37(8): 2454-2463.
- DUAN Z W, XIAO Z X. Roughness element induced hypersonic boundary layer transition[J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2016, 37(8): 2454-2463. (in Chinese)
- [41] JIANG S Y, FU S. Numerical investigation of separation-induced transition in a low-pressure turbine cascade in a low-disturbance environment [J]. *SCIENCE CHINA Physics, Mechanics & Astronomy*, 2020, 63(6): 1-17.
- [42] YANG J, ZHANG Y, CHEN H, et al. Unsteady flow control of a plane diffuser based on a Karman-vortex generator[J]. *AIP Advances*, 2020, 10(5): 055314.
- [43] WOODWARD P, COLELLA P. The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks[J]. *Journal of Computational Physics*, 1984, 54: 115-173.
- [44] TENAUD C, GARNIER E, SAGAUT P. Evaluation of some high-order shock capturing schemes for direct numerical simulation of unsteady two-dimensional free flows [J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2000, 33: 249-278.